

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Terça-feira, 09 de Novembro

2010
Turma C1

Exercício 1

a). Desejamos derivar a função

$$y(t) = \frac{t^3}{(t^2 + 1)^2}$$

Para isto usaremos a regra do quociente, ou seja

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{(t^3)'(t^2 + 1)^2 - t^3 [(t^2 + 1)^2]'}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3t^2(t^2 + 1)^2 - 2t^3(t^2 + 1)(2t)}{(t^2 + 1)^4} \\ &= \frac{3t^2(t^2 + 1)^2 - 4t^4(t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^4} \\ &= \frac{t^2(3 - t^2)}{(t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

□

b). Considere

$$p(x) = x^2 \cos x$$

$$q(x) = 1 + \ln x$$

Usando a regra do produto, temos que

$$p'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

e

$$q'(x) = \frac{1}{x}$$

Observe que

$$y(x) = p(x)q(x)$$

e, usando a regra do produto mais uma vez, teremos

$$\begin{aligned} y'(x) &= p'(x)q(x) + p(x)q'(x) \\ &= (2x \cos x - x^2 \sin x)(1 + \ln x) + \frac{x^2 \cos x}{x} \\ &= (2x \cos x - x^2 \sin x)(1 + \ln x) + x \cos x \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Observe que

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Inicialmente, calculemos $f'(x)$. Para isto, note que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 0 \\ -2x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e, para $x = 0$, tem-se que

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Observe porém, que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -h \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(0) = 0$$

e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Procedendo da mesma maneira para o cálculo de $f''(x)$, observe que

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 0 \\ -2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h}$$

Porém, perceba que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h-0}{h} = 2$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h-0}{h} = -2$$

ou seja,

$$f''(0) = \nexists$$

Portanto,

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \\ -2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

■

Exercício 3 Considere

$$f(x) = \phi(\phi(x))$$

Usando a regra da cadeia, temos que

$$f'(x) = \phi'(\phi(x))\phi'(x)$$

onde

$$\phi(x) = e^{x^2}$$

Tome

$$p(x) = e^x$$

$$q(x) = x^2$$

e observe que

$$p'(x) = e^x$$

$$q'(x) = 2x$$

e que

$$\phi(x) = p(q(x))$$

Assim, usando a regra da cadeia mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= p'(q(x))q'(x) \\ &= 2xe^{x^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\phi(x)e^{\phi^2(x)}\phi'(x) \\ &= 2e^{x^2}e^{e^{2x^2}}(2xe^{x^2}) \\ &= 4xe^{2x^2}e^{e^{2x^2}} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Seja (x_0, y_0) o ponto da curva

$$x^2 + 2y^2 = 9$$

tangenciado pela reta que desejamos encontrar. Derivando implicitamente a equação desta curva, em relação à x , obtemos

$$2x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

e, no ponto (x_0, y_0) teremos

$$2x_0 + 4y_0 \frac{dy}{dx}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{-x_0}{2y_0}$$

Assim, o coeficiente angular da reta que procuramos é dado por

$$m = \frac{-x_0}{2y_0}$$

e como este ponto pertence à curva, segue-se que

$$x_0^2 + 2y_0^2 = 9 \quad (1)$$

A equação da reta, em função de x_0 e y_0 é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$y - y_0 = \frac{-x_0}{2y_0}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$2y_0(y - y_0) = -x_0(x - x_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$2y_0y - 2y_0^2 = -x_0x + x_0^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2y_0y = -x_0x + 2y_0^2 + x_0^2$$

Usando (1), segue-se que

$$2y_0y = -x_0x + 9 \quad (2)$$

Como esta reta deve passar pelo ponto $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ devemos ter também que

$$2y_0 \frac{9}{4} = 9 \Leftrightarrow y_0 = 2$$

Voltando à equação (1) encontraremos

$$x_0^2 + 8 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

Assim, substituindo os valores encontrados (2), encontramos duas soluções para o problema:

$$4y = -x + 9 \Leftrightarrow y = \frac{-x + 9}{4}$$

$$4y = x + 9 \Leftrightarrow y = \frac{x + 9}{4}$$

■

Exercício 5 Seja r o raio do balão. Do enunciado do problema é dado que

$$\frac{dr}{dt} = -15 \text{ cm/min}$$

e o volume de ar contido neste balão é

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

Assim, derivando ambos lados desta equação, em

relação a t , encontramos

$$\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r^2(t) \frac{dr}{dt}$$

e, no instante em que $r = 9 \text{ cm}$ teremos portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\pi(81)(-15) \text{ cm}^3/\text{min} \\ &= -4860\pi \text{ cm}^3/\text{min} \end{aligned}$$

■