Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof°. Edson

2° Semestre

Gabarito 1ª Prova **2010**
Data: Terça-feira, 28 de Setembro **Turma C1**

Exercício 1 *Calculando o limite, teremos*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}-x^{100}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{99}(x+1)}{x^{100}(x-1)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{x+1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\\ &= 0\cdot 1\\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 2

a).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{x}\frac{x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0} x\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\\ &= 0\cdot 1\end{aligned}$$

□

b). Considere

$$L = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h - 1}$$

Calculando L teremos

$$\begin{aligned}L &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h}\frac{1+\cos 3h}{1+\cos 3h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}\frac{\frac{1}{9h^2}}{\frac{1}{9h^2}}\frac{\frac{1}{25h^2}}{\frac{1}{25h^2}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 3h}{9h^2}}{-\frac{\operatorname{sen}^2 5h}{25h^2}(1+\cos 3h)}\frac{9}{25}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\operatorname{sen} 3h}{3h}\right)^2}{-\left(\frac{\operatorname{sen} 5h}{5h}\right)^2(1+\cos 3h)}\frac{9}{25}\\ &= -\frac{9}{50}\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sabemos que*

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \le 2\\ 2x+k, & x > 2\end{cases}$$

Observe porém que, quando $x < 2$ temos

$$f(x) = kx^2$$

ou seja, f é uma função polinomial para $x < 2$ e isto nos permite afirmar que a mesma é contínua para qualquer $x < 2$. Pensando do mesmo modo, quando $x > 2$ temos

$$f(x) = 2x + k,$$

que também é polinomial para $x > 2$ e da mesma forma, contínua para todo $x > 2$. Assim, para que a função f seja continua para todo o conjunto $\mathbb{R}$, falta apenas que a mesma seja contínua em $x = 2$. Para que isto seja verdade devemos verificar três propriedades, que são

i). *Devemos verificar que $f(2)$ existe. Pela definição da função temos que $f(2) = 4k$, o que prova que $f(2)$ existe.*

ii). *Devemos verificar também que*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

Para isto, devemos ter

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 2^+}(2x+k) = \lim_{x\to 2^-} kx^2 \\ \Leftrightarrow \\ 4+k = 4k\end{gathered}$$

ou seja, para que esta propriedade seja válida devemos ter $k = \dfrac{4}{3}$ e

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{16}{3}$$

iii). *Por fim, devemos ter também que*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

ou seja

$$\frac{16}{3} = 4k \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

Assim, as três propriedades são satisfeitas se $k = \dfrac{4}{3}$. ■

Exercício 4 *Considere*

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\ln(x^3+2x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right]$$

Calculando L teremos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\left[\tfrac{1}{3}\ln(x^3+2x-1) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{(x^3+2x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt[2]{x^2+x+1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt[2]{x^2+x+1}}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[2]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \ln 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Exercício 5

$$\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^x = 1^0 = 1$$

■