Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2010**
Data: Quinta-feira, 09 de Dezembro **Turma 11**

Exercício 1

a).

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{1}=-1$$

b). Considere

$$A=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

Temos que

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\\
&= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Considere*

$$f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2(1+x^2)-x^3(2x)}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

e, derivando mais uma vez, teremos

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(6x+4x^3)(1+x^2)^2-x^2(3+x^2)[4x(1+x^2)]}{(1+x^2)^4}\\
&= \frac{2x(3+2x^2)(1+x^2)^2-4x^3(3+x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\\
&= \frac{2x(3+2x^2)(1+x^2)-4x^3(3+x^2)}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{2x(3+3x^2+2x^2+2x^4)-12x^3-4x^5}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{6x+10x^3+4x^5-12x^3-4x^5}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{-2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Seja (x_0,y_0) o ponto sobre o gráfico da função $y=e^{3x}$ no qual a reta tangente passa pela origem. A inclinação desta reta é data por*

$$m=\frac{dy}{dx}(x_0)$$

onde

$$\frac{dy}{dx}=3e^{3x}$$

ou seja,

$$m=3e^{3x_0}$$

e, como (x_0, y_0) *pertençe ao gráfico de* f*, temos também que*

$$y_0 = e^{3x_0}$$

Portanto a equação da reta que procuramos, em função de x_0 *e* y_0 *é dada por*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ou seja

$$y = 3e^{3x_0}x + e^{3x_0}(1 - 3x_0)$$

Como esta reta deve para pela origem, segue-se que

$$0 = e^{3x_0}(1 - 3x_0) \Rightarrow 1 - 3x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$$

e a o ponto que procuramos é

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, e\right)$$

■

Exercício 4 *Seja* r *o raio do semicírculo sobre a janela, como o diâmetro deste círculo coincide com a largura da janela, segue que a base da janela será* $2r$*. Supondo que a altura do retângulo que compõe a janela seja* h*, o perímetro* p *desta será então*

$$2h + 2r + \pi r = p \qquad (1)$$

e, a área é dada por

$$A = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$$

Usando a equação (1) temos que

$$2h = p - (2 + \pi)r$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} A(r) &= r[p - (2 + \pi)r] + \tfrac{1}{2}\pi r^2 \\ &= rp - (2 + \tfrac{1}{2}\pi)r^2 \end{aligned}$$

Desta forma, nossoproblema resume-se a encontrar um ponto de máximo para a função A*. Para isto devemos resolver a seguinte equação*

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow p - 2(2 + \frac{1}{2}\pi)r = 0$$

donde, resolvendo, teremos

$$r = \frac{p}{4 + \pi}$$

Observe que

$$A''(r) = -2(2 + \frac{1}{2}\pi) < 0$$

o que demonstra que o valor encontrado é realmente um ponto de máximo para a função A*.* ■

Exercício 5

a). Queremos calcular a integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \text{sen}\sqrt{x}\,dx$$

Para isto tome

$$y = \sqrt{x}$$

e observe que

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2dy = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}} \text{sen}\sqrt{x}\,dx &= \int 2\,\text{sen}\,y\,dy \\ &= -2\cos y + k \\ &= -2\cos(\sqrt{x}) + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$*.* □

b). Procedendo do mesmo, considere a integral

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

Tome

$$y = \ln x$$

e observe que

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{dy}{y} \\ &= \ln|y| + k \\ &= \ln|\ln x| + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$*.* ■