

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Sábado, 04 de Dezembro

2010
Turma 11

Exercício 1 *Considere*

$$f(x) = (x+1)^2 x^{\frac{1}{3}}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)x^{\frac{1}{3}} + (x+1)^2 \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2(x+1)\sqrt[3]{x} + (x+1)^2 \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{6x(x+1) + (x+1)^2}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{(x+1)(7x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue-se que

$$3\sqrt[3]{x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, o estudo de sinal da função f' pode ser obtido através do estudo de sinal do seu numerador, ou seja, através da função

$$g(x) = (x+1)(7x+1)$$

Esta função possui raízes

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -\frac{1}{7}$$

e, realizando o estudo de sinal de g , teremos que

$$g(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{7}, +\infty)$$

$$g(x) < 0 \text{ para } x \in (-1, -\frac{1}{7})$$

Ou seja,

$$f'(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{7}, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } x \in (-1, -\frac{1}{7})$$

Donde podemos concluir que

$$f \text{ é crescente para } x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{7}, +\infty)$$

$$f \text{ é decrescente para } x \in (-1, -\frac{1}{7})$$

Exercício 2 *Considere a função*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 2) - x^2(2x)}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 2 - x^2)}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2 - 2)^2 + 16x^2(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)^4} \\ &= \frac{(x^2 - 2)[-4(x^2 - 2) + 16x^2]}{(x^2 - 2)^4} \\ &= \frac{4(x^2 - 2)(3x^2 + 2)}{(x^2 - 2)^4} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{4(3x^2 + 2)}{(x^2 - 2)^4} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

o estudo de sinal da função f'' pode ser obtido através do estudo de sinal da função

$$g(x) = x^2 - 2$$

donde segue-se que

$$g(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

$$g(x) < 0 \text{ para } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Portanto

$$f''(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

$$f''(x) < 0 \text{ para } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

e disto segue-se que



- f possui concavidade voltada para cima quando $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- f possui concavidade voltada para baixo quando $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Além disso, como $\pm\sqrt{2} \notin D_f$, a função f não possui pontos de inflexão. ■

Exercício 3

a).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^8}{5x^4} = \frac{9}{5}$$

b).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{3x}}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9e^{3x}}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27e^{3x}}{6} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Exercício 4 Suponhamos que a base quadrada da caixa que desejamos construir tenha lado l e a altura seja h . Desta forma a área da superfície desta caixa é:

$$A(l, h) = l^2 + 4hl$$

e como é suposto no problema que o papelão utilizado para construir esta caixa é de 400cm^2 segue-se que

$$l^2 + 4hl = 400 \quad (1)$$

O volume desta caixa é dado por

$$V(l, h) = hl^2$$

e, usando a equação (1) teremos que

$$V(l) = \frac{400l - l^3}{4}$$

Assim, a resolução deste problema resume-se a encontrar o ponto de máximo da função V e para isto devemos encontrar seus candidatos a extremos os quais podem ser obtidos através da seguinte equação

$$V'(l) = 0$$

ou seja

$$\frac{400 - 3l^2}{4} = 0$$

donde, obtemos que

$$l = \pm \sqrt{\frac{400}{3}}$$

mas, como l deve ser um número positivo, segue-se que

$$l = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

Observe agora que

$$V''(l) = \frac{-6l}{4} \Rightarrow V''\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{30}{\sqrt{3}} < 0$$

e disto concluímos que $l = \frac{20}{\sqrt{3}}$ é um ponto de máximo da função V .

Voltando à equação (1) teremos também que

$$h = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Assim a caixa que queremos construir deverá ter dimensões

$$l = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Exercício 5

a).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{8}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} \right) dx \\ &= \left. \frac{3}{11} x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{4} x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{2} x^{\frac{2}{3}} \right|_0^1 \\ &= -\frac{306}{88} \end{aligned}$$

□

b). Queremos calcular a integral

$$\int x \sqrt{4x^2 + 5} dx$$

Para isto tome

$$y = 4x^2 + 5$$

e observe que

$$dy = 8xdx$$

Logo

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{4x^2+5}dx &= \frac{1}{8}\int \sqrt{y}dy \\ &= \frac{1}{12}y^{\frac{3}{2}} + k \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{y^3} + k \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{(4x^2+5)^3} + k\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

■