Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2010**
Data: Terça-feira, 09 de Novembro **Turma 11**

Exercício 1

a). Considere

$$h(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = 1 + \sqrt{x}$$

Observe que

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e

$$f(x) = h(g(x))$$

Assim, usando a regra da cadeia, teremos

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x + x\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

$\square$

b). Considere agora

$$p(x) = xe^x$$

$$q(x) = \cos x$$

Usando a regra do produto, temos que

$$p'(x) = e^x(1+x)$$

e

$$q'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Observe que

$$y(x) = p(x)q(x)$$

e, usando a regra do produto mais uma vez, teremos

$$\begin{aligned} y'(x) &= p'(x)q(x) + p(x)q'(x) \\ &= e^x(1+x)\cos x - xe^x \operatorname{sen} x \\ &= e^x\left[(1+x)\cos x - x\operatorname{sen} x\right] \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Inicialmente, calculemos $f'(x)$. Para isto, observe que*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3, & se\ x < 1 \\ 5, & se\ x > 1 \end{cases}$$

e, para $x = 1$, tem-se que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Observe porém, que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{5(1+h) - 1 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{5 + 5h - 5}{h} \\ &= 5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 3(1+h) - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + 5h}{h} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(1) = 5$$

e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3, & se\ x \leq 1 \\ 5, & se\ x > 1 \end{cases}$$

Procedendo da mesma maneira para o cálculo de $f''(x)$, observe que

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x < 1 \\ 0, & se\ x > 1 \end{cases}$$

e

$$f''(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$$

Porém, perceba que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{5-5}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)+3-5}{h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$f''(1) = \nexists$$

Portanto,

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x < 1 \\ \nexists & se\ x = 1 \\ 0, & se\ x > 1 \end{cases}$$

■

Exercício 3 *Considere*

$$f(x) = \phi(\phi(x))$$

Usando a regra da cadeia, temos que

$$f'(x) = \phi'(\phi(x))\phi'(x)$$

onde

$$\phi(x) = \ln(x^2+1)$$

Tome

$$p(x) = \ln x$$

$$q(x) = x^2 + 1$$

e observe que

$$p'(x) = \frac{1}{x}$$

$$q'(x) = 2x$$

e que

$$\phi(x) = p(q(x))$$

Assim, usando a regra da cadeia mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= p'(q(x))q'(x) \\ &= \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\ln(x^2+1)}{\left[\ln^2(x^2+1)+1\right]} \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{4x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)\left[1+\ln^2(x^2+1)\right]} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *A reta $x + y = 1$ possui coeficiente angular $m = -1$. Assim, devemos encontrar o ponto (x_0, y_0) sobre a curva*

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

cuja reta tangente possua coeficiente angular m. Derivando implicitamente, em relação à variável x, a equação da curva dada, obtemos

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$

donde, isolando o y' teremos

$$y'(x) = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da curva, no ponto (x_0, y_0) é dado por

$$y'(x_0) = \frac{-2x_0 - y_0}{x_0 + 2y_0}$$

onde

$$x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = 3 \tag{1}$$

Assim, como queremos a reta tangente que é paralela à reta $x + y = 1$, segue-se que

$$m = y'(x_0)$$

ou seja,

$$\frac{-2x_0 - y_0}{x_0 + 2y_0} = -1 \Leftrightarrow x_0 = y_0$$

*Substituido este resultado na equação (**??**) teremos então que*

$$3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

e disto segue-se que

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$$

e os pontos que a reta procurada tangencia o gráfico da curva dada são

$$(1, 1)\ e\ (-1, -1)$$

Com isto, as retas que passam por estes pontos e possuem coeficiente angular -1 são

$$y = -x + 2$$

$$y = -x - 2$$

■

Exercício 5 *Queremos encontrar o ponto* (x_0, y_0) *da curva*

$$x^2 + y^2 = 5,\ y \geq 0$$

para o qual

$$\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

Derivando a equação da curva em relação à variável t*, teremos*

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

*e, usando (***??***), segue-se*

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\left(2\frac{dx}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\frac{dx}{dt}\left(x + 2y\right) = 0$$

Como $\dfrac{dx}{dt} > 0$*, a equação anterior será verdadeira somente se*

$$x + 2y = 0$$

no ponto (x_0, y_0)*, ou seja, se*

$$x_0 + 2y_0 = 0$$

e, como este ponto pertence à curva, temos também que

$$x_0^2 + y_0^2 = 5$$

Usando estes dois resultados, teremos então, que

$$(-2y_0)^2 + y_0^2 = 5 \Leftrightarrow y_0 = \pm 1$$

mas, devemos ter $y_0 \geq 0$ *e disto segue-se que*

$$y_0 = 1$$

e

$$x_0 = -2$$

e, o ponto procurado é $(-2, 1)$*.* ■