Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1^{a} Prova **2010**
Data: Terça-feira, 28 de Setembro **Turma 11**

Exercício 1 *Calculando o limite, obtemos*

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\tfrac{3}{t+1}-\tfrac{5}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to -1^+}\left(\tfrac{3}{t+1}-\tfrac{5}{(t+1)(t-1)}\right)$$

$$= \lim_{t\to -1^+}\tfrac{1}{t+1}\left(3-\tfrac{5}{(t-1)}\right)$$

Observe que

$$t\to -1^+ \Rightarrow t > -1 \Rightarrow t+1>0$$

logo,

$$\frac{1}{t+1}\to +\infty \text{ quando } t\to -1^+$$

e

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\tfrac{3}{t+1}-\tfrac{5}{t^2-1}\right) = +\infty\cdot(3+\tfrac{5}{2})$$

$$= +\infty$$

■

Exercício 2

a). Observe que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{5\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{5\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

e como $x\to 0^+$, segue-se que $x>0$ e

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = |x| = x$$

e disto temos que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{5\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{\operatorname{sen} x}{5x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{5}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= 0$$

□

b). Calculando o limite teremos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{\cos 7x \operatorname{sen} 3x}\frac{7x}{7x}\frac{3x}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\frac{1}{\cos 7x}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}\frac{7}{3}$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{7}{3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

■

Exercício 3

a). Como f e g são funções contínuas, segue-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \forall a\in D_f$$

e,

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a), \forall a\in D_g$$

Tomando $a=2$ e usando a hípotese de que $f(2)=1$ teremos

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$$

e,

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$$

Usando a informação dada, de que

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+4g(x)] = 13$$

e as propriedades dos limites, válidas aqui por serem as funções f e g contínuas, teremos então que

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+4g(x)] = 13 \quad\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) + 4\lim_{x\to 2} g(x) = 13 \quad\Leftrightarrow$$

$$1+4g(2) = 13 \quad\Leftrightarrow$$

$$g(2) = 3$$

□

b). Como g é uma função contínua, é válido que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$$

e do ítem anterior, segue-se

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3$$

■

Exercício 4 *Considere*

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(3x+2)\right]$$

Calculando L teremos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(3x+2)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{3x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{\frac{3x+2}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}} \\
&= \ln\frac{1}{3} \\
&= -\ln 3
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Desejamos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

Para isto, considere

$$y = \frac{1}{2x}$$

e observe que

$$x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$$

e

$$x \to 0^- \Rightarrow y \to -\infty$$

Desta forma, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^{2y} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{y})^{y}\right]^2 \\
&= e^2
\end{aligned}$$

por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to-\infty}(1+\frac{1}{y})^{2y} \\
&= \lim_{y\to-\infty}\left[(1+\frac{1}{y})^{y}\right]^2 \\
&= e^2
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

■