

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Terça-feira, 08 de Dezembro

2009
Turma C1

Exercício 1 O estudo de crescimento da função

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

é obtido através do estudo de sinal de sua derivada.
Assim, iniciamos calculando sua derivada:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue-se que $f'(x) < 0$ para qualquer $x \neq 0$ e, em consequência disto temos que f é decrescente em $\mathbb{R} - \{0\}$. ■

Exercício 2 O estudo de concavidade da função

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

é dado através do estudo de sinal da função f'' .
Calculando-a, teremos

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

Observe que $e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e, o estudo de sinal da função f'' depende apenas da função

$$g(x) = x^3$$

a qual sabemos que

$$x < 0 \Rightarrow g(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

Logo,

$$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

e em consequência disto segue-se que

f terá concavidade para baixo quando $x < 0$

f terá concavidade para cima quando $x > 0$

Como em $x = 0$ ocorre o encontro de duas concavidades diferentes, somos levados a acreditar que $x = 0$ seja um ponto de inflexão mas, como pode ser visto na definição da função f , o ponto $x = 0$ não pertence ao domínio da mesma. Portanto esta função não possui pontos de inflexão. ■

Exercício 3

a). Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

□

b). Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \ln x$$

Para isto, observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(x^2 + 1) \frac{1}{\ln x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x^2}{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{4x}{2x}} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Seja (a, b) um vértice do retângulo inscrito na elipse

$$4x^2 + y^2 = 1$$

Como este ponto pertence também à elipse segue-se que

$$4a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1 - 4a^2}$$

Observe que, por simetria os outros três vértices do retângulo são

$$(a, -b), (-a, b), (-a, -b)$$

e, a área deste retângulo é dada por

$$A = 2a \times 2b$$

e disto segue-se que

$$A(a) = 4a\sqrt{1 - 4a^2}$$

Para encontrarmos os candidatos a extremos desta função procedemos da seguinte maneira

$$A'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{-32a^2 + 4}{\sqrt{1 - 4a^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-32a^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$32a^2 = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$$

Assim, os candidatos a extremos da função A são $a = \sqrt{\frac{1}{8}}$ e $a = -\sqrt{\frac{1}{8}}$. Observe que

$$A''(a) = \frac{16a(8a^2 - 3)}{(1 - 4a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$A''\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = -32$$

e

$$A''\left(-\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = 32$$

Portanto $a = \sqrt{\frac{1}{8}}$ é o ponto de máximo da função A e o retângulo procurado possui vértices

$$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b)$$

onde

$$a = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

e

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

■

Exercício 5

a).

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2+1}{x} \right) dx &= \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$

b). Tome

$$y = x + 1$$

e observe que

$$dy = dx$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^5} dx &= \int_1^2 \frac{y-1}{y^5} dy \\ &= \int_1^2 (y^{-4} - y^{-5}) dy \\ &= -\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{4y^4} \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{192} \end{aligned}$$

■