Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2$^{\text{a}}$ Prova **2009**
Data: Quinta-feira, 19 de Novembro **Turma C1**

Exercício 1

a). *Considere a função*

$$h(t) = e^{t^2}$$

Tome

$$u(t) = e^t$$

$$v(t) = t^2$$

e observe que

$$u'(t) = e^t$$

$$v'(t) = 2t$$

e

$$h(t) = u(v(t))$$

Donde, usando a regra da cadeia, teremos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= u'(v(t))v'(t) \\ &= e^{t^2}(2t) \\ &= 2te^{t^2} \end{aligned}$$

Procedendo do mesmo modo, considere a função

$$g(t) = \operatorname{sen} 3t$$

e tome

$$r(t) = \operatorname{sen} t$$

$$s(t) = 3t$$

e observe que

$$r'(t) = \cos t$$

$$s'(t) = 3$$

e

$$g(t) = r(s(t))$$

e, novamente usando a egra da cadeia teremos que

$$\begin{aligned} g'(t) &= r'(s(t))s'(t) \\ &= 3\cos 3t \end{aligned}$$

Por fim, perceba que

$$y(t) = h(t)g(t)$$

e, usando a regra do produto, teremos

$$\begin{aligned} y'(t) &= h'(t)g(t) + h(t)g'(t) \\ &= 2te^{t^2} \operatorname{sen} 3t + 3e^{t^2} \cos 3t \\ &= e^{t^2} (2t\operatorname{sen} 3t + 3\cos 3t) \end{aligned}$$

$\square$

b). *Considere a função*

$$p(x) = \sec \sqrt{x}$$

Tome

$$u(x) = \sec x$$

$$v(t) = \sqrt{x}$$

e observe que

$$u'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e

$$p(x) = u(v(x))$$

Donde, usando a regra da cadeia, teremos que

$$\begin{aligned} p'(x) &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{\sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Considere agora a função

$$q(x) = e^{p(x)}$$

e tome

$$v(x) = e^x$$

observe que

$$v'(x) = e^x$$

e

$$q(x) = v(p(x))$$

Donde, usando a regra da cadeia mais uma vez, teremos que

$$\begin{aligned} q'(x) &= v'(p(x))p'(x) \\ &= e^{p(x)}p'(x) \\ &= e^{\sec\sqrt{x}}\frac{\sec\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$g(x) = \frac{e^{\sec\sqrt{x}}}{x} = \frac{q(x)}{x}$$

e, usando a regra do quociente, teremos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{q'(x)x - q(x)}{x^2} \\ &= \frac{e^{\sec\sqrt{x}}\frac{\sec\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}x - e^{\sec\sqrt{x}}}{x^2} \\ &= e^{\sec\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x} - 2}{2x^2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Sabemos que*

$$g(x) = f(e^{2x})$$

Então, se considerarmos

$$h(x) = e^{2x}$$

teremos

$$h'(x) = 2e^{2x}$$

$$h''(x) = 4e^{2x}$$

e

$$g(x) = f(h(x))$$

Logo, usando a regra da cadeia, teremos

$$g'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

Considere agora a função

$$p(x) = f'(h(x))$$

Usando a regra da cadeia novamente, teremos

$$p'(x) = f''(h(x))h'(x)$$

Observe agora que

$$g'(x) = p(x)h'(x)$$

e usando a regra de derivação do produto teremos

$$g''(x) = p'(x)h'(x) + p(x)h''(x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(h(x))h'(x)h'(x) + f'(h(x))h''(x) \\ &= f''(h(x))\left[h'(x)\right]^2 + f'(h(x))h''(x) \\ &= f''(e^{2x})\left[2e^{2x}\right]^2 + f'(e^{2x})4e^{2x} \\ &= 4f''(e^{2x})e^{4x} + 4f'(e^{2x})e^{2x} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sabemos que $y = f(x)$ é dada implicitamente através da equação*

$$xy^3 + 2xy^2 + x = 4$$

e que

$$f(1) = 1$$

Derivando implicitamente a equação dada em relação a x, teremos

$$y^3 + 3xy^2y' + 2y^2 + 4xyy' + 1 = 0$$

Donde, isolando y' obtemos

$$y' = \frac{-y^3 - 2y^2 - 1}{3xy^2 + 4xy}$$

ou seja

$$f'(x) = \frac{-f(x)^3 - 2f(x)^2 - 1}{3xf(x)^2 + 4xf(x)}$$

O que implica dizer que

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{-f(1)^3 - 2f(1)^2 - 1}{3f(1)^2 + 4f(1)} \\ &= \frac{-1 - 2 - 1}{3 + 4} \\ &= -\tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere $(p, f(p))$ como sendo o ponto onde a reta $y = \beta x - 2$ tangencia o gráfico da função*

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Como

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(p, f(p))$ é dado por

$$m = f'(p) = 3p^2 - 4$$

Assim, a equação desta reta deve ser

$$y - f(p) = m(x - p)$$

ou seja

$$y = (3p^2 - 4)x - 2p^3$$

Assim, para que a reta $y = \beta x - 2$ seja tangente ao gráfico da função f no ponto $(p, f(p))$ devemos ter

$$\begin{cases} \beta = 3p^2 - 4 \\ \\ -2 = -2p^3 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos $p = 1$ e $\beta = -1$. ■

Exercício 5 *Sabemos que a área A de um retângulo de lados x e y é dada por*

$$A = xy$$

Como a medida destes lados está variando com o passar do tempo, segue-se que

$$A(t) = x(t)y(t)$$

Assim, derivando em relação a t obtemos a taxa de variação da área do retângulo em relação ao tempo, ou seja

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}y(t) + x(t)\frac{dy}{dt}$$

Como é informado no enunciado do problema que

$$\frac{dx}{dt} = 0,2m/s$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,1m/s$$

no instante em que $x = 1m$ e $y = 2m$, segue-se então que neste instante deveremos ter

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{dx}{dt}y(t) + x(t)\frac{dy}{dt} \\ &= 0,2 \cdot 2 + 0,1 \cdot 1 \\ &= 0,5m^2/s \end{aligned}$$

■