Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2009**
Data: Quinta-feira, 17 de Setembro **Turma C1**

Exercício 1

a).

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

□

b).

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^6-1}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{x^6(5-\frac{1}{x^6})}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{x^2\sqrt[3]{5-\frac{1}{x^6}}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{5-\frac{1}{x^6}}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt[3]{5}}$$

■

Exercício 2

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+ax}-x =$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)\frac{(\sqrt{x^2+ax}+x)}{(\sqrt{x^2+ax}+x)} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2(1+\frac{a}{x})}+x} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{x\sqrt{1+\frac{a}{x}}+x} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} =$$

$$\frac{a}{2}$$

■

Exercício 3 *Sabemos que*

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \le 2 \\ 2x+k, & x > 2 \end{cases}$$

Observe porém que, quando $x < 2$ temos

$$f(x) = kx^2$$

ou seja, f é uma função polinomial para $x < 2$ e isto nos permite afirmar que a mesma é contínua para qualquer $x < 2$. Pensando do mesmo modo, quando $x > 2$ teremos

$$f(x) = 2x + k,$$

que também é polinomial para $x > 2$ e da mesma forma, contínua para todo $x > 2$. Assim, para que a função f seja continua para todo o conjunto $\mathbb{R}$, falta apenas que a mesma seja contínua em $x = 2$. Para que isto seja verdade devemos verificar três propriedades, que são

i). *Devemos verificar que $f(2)$ existe. Pela definição da função temos que $f(2) = 4k$, o que prova que $f(2)$ existe.*

ii). *Devemos verificar também que*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

Para isto, devemos ter

$$\lim_{x\to 2^+} 2x+k = \lim_{x\to 2^-} kx^2 \Leftrightarrow 4+k = 4k \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

iii). *As propriedades (i) e (ii) devem ser iguais, ou seja*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

Assim, as três propriedades são satisfeitas se $k = \frac{4}{3}$. ■

Exercício 4

a).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^x}{x^x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\ &= e\end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+5x) \\ &= \lim_{x\to 0} \ln(1+5x)^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Tome $y = \frac{1}{5x}$ *e observe que que*

$$x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$$

e

$$x \to 0^- \Rightarrow y \to -\infty$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+5x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \ln(1+5x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \ln(1+\tfrac{1}{y})^{5y} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \ln\left[(1+\tfrac{1}{y})^y\right]^5 \\ &= \ln e^5 = 5\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+5x)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \ln(1+5x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{y\to-\infty} \ln(1+\tfrac{1}{y})^{5y} \\ &= \lim_{y\to-\infty} \ln\left[(1+\tfrac{1}{y})^y\right]^5 \\ &= \ln e^5 = 5\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} = 5$$

■

Exercício 5

a). *Tome* $y = x - \pi$ *e observe que que*

$$x \to \pi \Rightarrow y \to 0$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{\pi - x}{\text{sen } x} &= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\text{sen }(y+\pi)} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\text{sen } y\cos\pi + \text{sen } \pi\cos y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{-\text{sen } y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\text{sen } y}{y}} \\ &= 1\end{aligned}$$

□

b). *Tome* $y = x - \frac{\pi}{4}$ *e observe que que*

$$x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow y \to 0$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \text{sen } x}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{y\to 0} \frac{\cos(y+\frac{\pi}{4}) - \text{sen }(y+\frac{\pi}{4})}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - 2\text{sen } y - \cos y)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-2\text{sen } y)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-\sqrt{2}\text{sen } y}{y} \\ &= -\sqrt{2}\end{aligned}$$

■