Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2009**
Data: Terça-feira, 08 de Dezembro **Turma 11**

Exercício 1 *O estudo de crescimento da função*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

é obtido através do estudo de sinal de sua derivada. Assim, iniciamos calculando sua derivada. Usando a regra do produto temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o estudo de sinal da função f' depende apenas da função

$$g(x) = 1 - \ln x$$

Calculando as raízes de g, teremos

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ 1 - \ln x = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ \ln x = 1 &\quad \Leftrightarrow \\ x = e & \end{aligned}$$

e através do gráfico da função g, podemos deduzir que

$$g(x) > 0, \text{ para } x < e$$

$$g(x) < 0, \text{ para } x > e$$

e como a função f não esta definida para $x < 0$, segue-se que

$$f \text{ é crescente, para } 0 < x < e$$

$$f \text{ é decrescente para } x > e$$

■

Exercício 2 *O estudo de concavidade da função*

$$f(x) = x \ln x$$

é dado através do estudo de sinal da função f''. Calculando-a, teremos

$$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$$

Observe que,

$$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Como $x < 0$ não pertence ao domínio da função f podemos afirmar que

$$f \text{ terá concavidade para cima quando } x > 0$$

e como não há encontro de concavidades diferentes, não há também pontos de inflexão. ■

Exercício 3

a). Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$$

Observe que

$$x \to +\infty \Rightarrow \ln x \to +\infty \text{ e } e^{3x} \to +\infty$$

Logo, usando a regra de L'Hospital teremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3e^{3x}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3xe^{3x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

b). Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \cos x) \ln x$$

Para isto, observe que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{1-\cos x}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\dfrac{\text{sen } x}{(1-\cos x)^2}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^2}{x\text{sen } x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{2(1-\cos x)\text{sen } x}{\text{sen } x + x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{2(\text{sen}^2 x+\cos x-\cos^2 x)}{2\cos x - x\text{sen } x}\\
&= \frac{0}{2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Um ponto sobre a curva* $y = \dfrac{2}{x}$ *possui coordenadas* $p = \left(x, \dfrac{2}{x}\right)$ *e a distância deste ponto à origem é dada por*

$$d = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

Observe que minimizando a função

$$g(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$$

minizamos também a função d. Então, calculando os candidatos a extremos da função g, teremos

$$
\begin{aligned}
g'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow\\
2x - \frac{8}{x^3} = 0 \quad &\Leftrightarrow\\
2x = \frac{8}{x^3} \quad &\Leftrightarrow\\
2x^4 = 8 \quad &\Leftrightarrow\\
x = \sqrt[4]{4}
\end{aligned}
$$

Assim, $x = \sqrt[4]{4}$ *é o único candidato a extremo da função g. Observe que*

$$g''(x) = 2 + \frac{24}{x^4}$$

e

$$g''(\sqrt[4]{4}) = 2 + \frac{24}{4} = 8 > 0$$

E isto nos permite afirmar que $x = \sqrt[4]{4}$ *é um ponto de mínimo da função g e com isto segue que o ponto procurado é*

$$p = \left(\sqrt[4]{4}, \frac{2}{\sqrt[4]{4}}\right)$$

■

Exercício 5

a).

$$
\begin{aligned}
\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx &= \int\left(2\frac{1}{x}+3x^{-2}\right)dx\\
&= 2\ln|x| - \frac{3}{x} + k
\end{aligned}
$$

onde $k \in \mathbb{R}$

b). Tome

$$y = x + 1$$

e observe que

$$dy = dx$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x(x+1)^{100}dx &= \int_0^1 (y-1)y^{100}dy\\
&= \int_0^1 \left(y^{101} - y^{100}\right)dy\\
&= \left.\frac{y^{102}}{102} - \frac{y^{101}}{101}\right|_0^1\\
&= \frac{1}{102} - \frac{1}{101}\\
&= \frac{-1}{10302}
\end{aligned}
$$

■