

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Quinta-feira, 19 de Novembro

2009
Turma 11

Exercício 1

a). Considere a função

$$h(x) = 5^{x^2}$$

Tome

$$u(x) = 5^x$$

$$v(x) = x^2$$

e observe que

$$u'(x) = 5^x \ln 5$$

$$v'(x) = 2x$$

e

$$h(x) = u(v(x))$$

Donde, usando a regra da cadeia, teremos que

$$h'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

$$= 5^{x^2} \ln 5 (2x)$$

$$= 2x \ln 5 \cdot 5^{x^2}$$

Observe agora que

$$y(x) = xh(x)$$

e, usando a regra do produto, teremos

$$y'(x) = h(x) + xh'(x)$$

$$= 5^{x^2} + x(2x \ln 5 \cdot 5^{x^2})$$

$$= 5^{x^2} (1 + 2x^2 \ln 5)$$

□

b). Considere a função

$$p(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Tome

$$u(x) = \operatorname{tg} x$$

$$v(x) = \frac{x}{2}$$

e observe que

$$u'(x) = \sec^2 x$$

$$v'(x) = \frac{1}{2}$$

e

$$p(x) = u(v(x))$$

Donde, usando a regra da cadeia, teremos que

$$p'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$$

Considere agora a função

$$q(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 + p(x)}{1 - p(x)}$$

Usando a regra do quociente, teremos que

$$q'(x) = \frac{p'(x)[1 - p(x)] - [1 + p(x)][-p'(x)]}{[1 - p(x)]^2}$$

$$= \frac{2p'(x)}{[1 - p(x)]^2}$$

$$= \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{[1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}]^2}$$

Por fim, observe que

$$g(x) = \ln(q(x))$$

e, usando a regra da cadeia, teremos que

$$g'(x) = \frac{1}{q(x)} q'(x)$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{[1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}]^2}$$

$$= \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

■

Exercício 2 Precisamos inicialmente calcular a derivada da função

$$f(x) = e^x g(3x + 1)$$

Para isto, considere

$$h(x) = 3x + 1$$

e

$$p(x) = g(3x + 1)$$

Observe então que

$$p(x) = g(h(x))$$

Portanto, usando a regra da cadeia, teremos

$$\begin{aligned} p'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= 3g'(3x + 1) \end{aligned}$$

Observe agora que

$$f(x) = e^x p(x)$$

e usando a regra de derivação do produto teremos

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x p(x) + e^x p'(x) \\ &= e^x [p(x) + p'(x)] \\ &= e^x [g(3x + 1) + 3g'(3x + 1)] \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$f'(0) = e^0 [g(1) + 3g'(1)]$$

Como sabemos que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$, segue-se que

$$f'(0) = 2 + 3 \cdot 3 = 11$$

■

Exercício 3 Sabemos que $y = f(x)$ é dada implicitamente através da equação

$$3x^2 + x \sin y = 2$$

Derivando implicitamente esta equação em relação a x , obtemos

$$6x + \sin y + x \cos y \frac{dy}{dx} = 0$$

Donde, segue-se que

$$x \cos y \frac{dy}{dx} = -6x - \sin y$$

Como foi dito que $x \cos y \neq 0$, temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x - \sin y}{x \cos y}$$

■

Exercício 4 Seja (p, q) o ponto onde a reta procurada tangencia a curva

$$x^2 + xy + y^2 = 3 \quad (1)$$

Como este ponto também pertence à curva, podemos afirmar que

$$p^2 + pq + q^2 = 3 \quad (2)$$

Por outro lado, sabemos que a reta que procuramos deve ser paralela à reta $x + y = 1$, ou seja, seu coeficiente angular deve ser igual a -1 . Derivando implicitamente a equação (1) em relação a x teremos

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$

Donde, isolando y' obtemos

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

ou seja, o coeficiente angular da reta que tangencia a curva no ponto (p, q) é dado por

$$m = y'(p) = \frac{-2p - q}{p + 2q}$$

e como sabemos, este coeficiente deve ser igual a -1 , devemos ter então que

$$\frac{-2p - q}{p + 2q} = -1$$

Logo, resolvendo esta equação teremos

$$p = q$$

Substituindo este resultado na equação (2) teremos

$$p = \pm 1$$

Assim, encontramos que o ponto de tangência pode ser o ponto $(1, 1)$ ou o ponto $(-1, -1)$ e as retas tangentes à curva dada neste pontos são, respectivamente

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

e

$$y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$$

■

Exercício 5 Sabemos que o volume de um cone circular reto de altura h e raio da base r , é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Como a medida da altura e do raio está variando com o passar do tempo, segue-se que

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi [r(t)]^2 h(t)$$

Assim, derivando em relação a t obtemos a taxa de variação do volume do cone em relação ao tempo, ou seja

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \left[2r(t)h(t)\frac{dr}{dt} + r^2(t)\frac{dh}{dt} \right]$$

Como é informado no enunciado do problema que

$$\frac{dh}{dt} = 0,1m/s$$

$$\frac{dr}{dt} = 0,3m/s$$

no instante em que $h = 0,5m$ e $r = 0,2m$, segue-se então que neste instante deveremos ter

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{3}\pi [2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + (0,2)^2 \cdot 0,1] \\ &= \frac{1}{3}\pi [2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{10}] \\ &= \frac{64\pi}{3000}m^3/s \end{aligned}$$

■