Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2009**
Data: Quarta-feira, 16 de Setembro **Turma 11**

Exercício 1

a).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}} &= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}}\frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1-x)(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1+x}\\
&= 2
\end{aligned}$$

$\square$

b). *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Tome $y=\dfrac{1}{x}$ *e perceba que*

$$x\to+\infty \Rightarrow y\to 0$$

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}\ y}{y}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})\frac{(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})}{(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2(1+\frac{a}{x})}+\sqrt{x^2(1+\frac{b}{x})}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a-b)}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}} =$$

$$\frac{a-b}{2}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Sabemos que*

$$f(x)=\begin{cases} 7x-2, & x\le 1\\ kx^2, & x>1\end{cases}$$

Observe porém que, quando $x<1$ *temos*

$$f(x)=7x-2$$

ou seja, f é uma função polinomial para $x<1$ *e isto nos permite afirmar que a mesma é contínua para qualquer* $x<1$*. Pensando do mesmo modo, quando* $x>1$ *teremos*

$$f(x)=kx^2,$$

que também é polinomial para $x>1$ *e da mesma forma, contínua para todo* $x>1$*. Assim, para que* *a função f seja continua para todo o conjunto $\mathbb{R}$, falta apenas que a mesma seja contínua em $x = 1$. Para uqe isto seja verdade devemos verificar três propriedades, que são*

i). *Devemos verificar que $f(1)$ existe. Mas pela definição da função temos que $f(1) = 5$, o que prova que $f(1)$ existe.*

ii). *Devemos verificar também que*

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Para isto, devemos ter

$$\lim_{x\to 1^+} kx^2 = \lim_{x\to 1^-} 7x - 2 \\ \Leftrightarrow \\ k = 5$$

iii). *As propriedades (i) e (ii) devem ser iguais, ou seja*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Assim, as três propriedades são satisfeitas se $k = 5$. ■

Exercício 4

a). *Considere $y = x - 1$ e observe que*

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

e, além disto segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^x}{x^x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x \\
&= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{y+1} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1}} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}\left(1+\frac{1}{y}\right)} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

□

b). *Considere $y = x - 1$ e observe que*

$$x \to 1 \Rightarrow y \to 0$$

e, além disto segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen } \pi x}{x-1} &= \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen } \pi(y+1)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen } \pi y \cos \pi + \sin \pi \cos \pi y}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{-\text{sen } \pi y}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{-\text{sen } \pi y}{\pi y}\pi \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 5

a).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) \\
&= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Tome $y = \dfrac{1}{x}$ e observe que que

$$x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$$

e

$$x \to 0^- \Rightarrow y \to -\infty$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \ln(1+\tfrac{1}{y})^y \\
&= \ln e \\
&= 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{y\to-\infty} \ln(1+\tfrac{1}{y})^y \\
&= \ln e \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

□

b).

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1}\,\frac{1+\cos 3h}{1+\cos 3h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 3h}{-\mathrm{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 3h}{-\mathrm{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 3h}{-\mathrm{sen}^2 5h(1+\cos 3h)\dfrac{25h^2}{25h^2}}\,\frac{9h^2}{9h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{9\left(\dfrac{\mathrm{sen}\ 3h}{3h}\right)^2}{-25\left(\dfrac{\mathrm{sen}\ 5h}{5h}\right)^2(1+\cos 3h)}$$

$$= -\frac{9}{50}$$

■