Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2007**
Data: Terça-feira, 11 de Dezembro **Turma C1**

Exercício 1

a). *Observe que, quando $x \to -1$,*

$$4x^3 + x^2 + 3 \to 0$$

e

$$x^5 + 1 \to 0$$

Logo, usando a regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{x\to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{12x^2 + 2x}{5x^4} = \frac{10}{5} = 2$$

□

b). *Observe que, quando $x \to +\infty$,*

$$e^{3x} \to +\infty$$

e

$$x^2 \to +\infty$$

Portanto, usando a regra de L'Hospital, segue-se que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3e^{3x}}{2x}$$

Observe novamente que, quando $x \to +\infty$,

$$3e^{3x} \to +\infty$$

e

$$2x \to +\infty$$

e, usando a regra de L'Hospital outra vez, temos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = +\infty$$

■

Exercício 2 *Dado que*

$$g(x) = f(x^2),$$

usando a regra da cadeia teremos que

$$g'(x) = 2xf'(x^2)$$

e, derivando novamente usando a regra da cadeia, teremos

$$g''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$$

e, como $f'(4) = 2$ e $f''(4) = 3$, segue-se que

$$g''(x) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4 + 48 = 52$$

■

Exercício 3 *Sabemos que*

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$$

a). *O estudo de crescimento e decrescimento da função f pode ser obtido através do estudo de sinal da função f'. Para tanto, observe que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)x^2 - (x^2 - x + 1)(2x)}{x^4} \\ &= \frac{2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 2x}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{x^4} \end{aligned}$$

Como $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o estudo de sinal da função f' pode ser reduzido ao estudo de sinal da função

$$g(x) = x^2 - 2x$$

e como se trata de uma função de segundo frau, temos que

$$g(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$g(x) < 0 \text{ para } x \in (0, 2)$$

Ou seja,

f *é crescente em* $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

f *é decrescente em* $(0, 2)$

□

b). *O estudo de concavidades da função f pode ser obtido através do estudo de sinal da função f''. Para tanto observe que*

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

e portanto

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^3 - (x-2)(3x^2)}{x^6} \\ &= \frac{x^3 - 3x^3 + 6x^2}{x^6} \\ &= \frac{-2x^3 + 6x^2}{x^6} \\ &= \frac{6-2x}{x^4} \end{aligned}$$

Novamente, como $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o estudo de sinal da função f'' pode ser reduzido ao estudo de sinal da função

$$h(x) = 6 - 2x$$

e como se trata de uma função do primeiro grau, temos que

$$h(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, 3)$$

$$h(x) < 0 \text{ para } x \in (3, +\infty)$$

Assim,

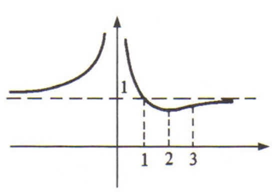
$$f \text{ possui concavidade para cima em } (-\infty, 3)$$

$$f \text{ possui concavidade para baixo em } (3, +\infty)$$

□

c). *Como em $x = 3$ acontece o encontre de duas concavidades de nomes contrários, segue-se que $x = 3$ é um ponto de inflexão da função f. E como isto só ocorre uma vez, ele é único.* □

d). *Juntando o que foi obtido nos itens anteriores, um esboço do gráfico seria*



Exercício 4 *Suponha que a caixa que desejamos construir tenha como base um quadrado de lado l e sua altura seja h. Assim, o seu volume seria*

$$V = l^2 h$$

mas, por outro lado sabemos que

$$V = 4000$$

Logo, segue-se que

$$l^2 h = 4000 \Leftrightarrow h = \frac{4000}{l^2}$$

A área da superfície desta caixa é

$$A = l^2 + 4lh$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A(l) &= l^2 + 4l\frac{4000}{l^2} \\ &= l^2 + \frac{16000}{l} \end{aligned}$$

Para descobrirmos os extremos desta função, precisamos resolver a equação

$$A'(l) = 0$$

que é equivalente a

$$2l - \frac{16000}{l^2} = 0 \Leftrightarrow l^3 = 8000 \Leftrightarrow l = 20$$

Observe ainda, que

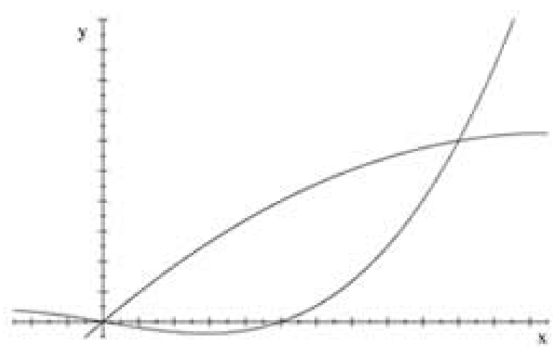
$$A''(l) = 2 + \frac{32000}{l^3}$$

e

$$A''(20) = 6 > 0$$

e isto significa que $l = 20$ realmente é um minmizante para a a função A. Assim as dimensões da caixa são $l = 20cm$ e $h = \frac{4000}{l^2} = 10cm$. ■

Exercício 5 *Fazendo esboço do gráfico das duas curvas obtemos*



Calculando a interseção entre as duas curvas temos

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ \\ y = x^3 - x \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x = x^3 - x \quad & \Leftrightarrow \\ x^3 + x^2 - 6x = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ x(x^2 + x - 6) = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ x = 0 \ \text{ou}\ x = 2 \ \text{ou}\ x = -3 & \end{aligned}$$

Como $x \geq 0$ temos que a área da região em questão sera pada por

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[(-x^2 + 5x) - (x^3 - x)\right] dx &= \int_0^2 \left(-x^2 + 6x - x^3\right) dx \\ &= -\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\Big|_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

■