Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2007**
Data: Segunda-feira, 03 de Dezembro **Turma C1**

Exercício 1 a). *Sabendo que*

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$$

segue-se que

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 18x$$

e

$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 18$$

O estudo de crescimento e decrescimento da função f pode ser feito através do estudo de sinal da função f'. Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ 4x^3 - 15x^2 + 18x = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ x\left(4x^2 - 15x + 18\right) = 0 & \end{aligned}$$

Esta equação possui $x = 0$ como sua única solução real pois a função

$$g(x) = 4x^2 - 15x + 18$$

possui discriminante

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18 = -63 < 0$$

e isto implica dizer que a mesma não possui solução real e, além, disso, como se trata de uma função do segundo grau e sua concavidade está voltada para cima, podemos concluir também que

$$4x^2 - 15x + 18 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \ \textit{se} \ x > 0 \\ f'(x) < 0 \ \textit{se} \ x < 0 \\ f'(x) = 0 \ \textit{se} \ x = 0 \end{aligned}$$

e, em conseqüência disto, temos que

$$\begin{aligned} f \ \textit{é crescente em} \ (0, +\infty) \\ f \ \textit{é decrescente em} \ (-\infty, 0) \end{aligned}$$

De modo semelhante, o estudo de concavidades da função f pode ser obtido através do estudo de sinal da função f''. Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ 12x^2 - 30x + 18 = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ 6(2x^2 - 5x + 3) = 0 \quad & \Leftrightarrow \\ x = 1 \ \textit{ou} \ x = \tfrac{3}{2} & \end{aligned}$$

e como f'' é uma função do segundo grau com concavidade voltada para cima, segue-se que

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \ \textit{se} \ x \in (-\infty, 1) \cup \left(\tfrac{3}{2}, +\infty\right) \\ f''(x) < 0 \ \textit{se} \ x \in \left(1, \tfrac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Assim,

f *possui concavidade p/cima em* $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$;
f *possui concavidade p/baixo em* $\left(1, \frac{3}{2}\right)$;
f *possui pontos de inflexão em* $x = 1$ *e* $x = \frac{3}{2}$;

Em resumo, temos

a). $(0, +\infty)$;

b). $(-\infty, 0)$;

c). $\left(1, \frac{3}{2}\right)$;

d). $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$;

e). $x = 1$ *e* $x = \frac{3}{2}$.

■

Exercício 2 *Mostrar que*

$$e^x \geq x + 1 \ \textit{para} \ x \geq 0$$

é equivalente a mostrar que

$$e^x - x - 1 \geq 0 \ \textit{para} \ x \geq 0$$

Para isto, considere a função

$$f(x) = e^x - x - 1$$

e observe que

$$f(0) = 0$$

e

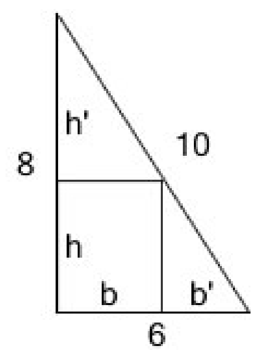
$$\begin{gathered} f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \text{ se } x \geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ f \text{ é crescente para } x \geq 0 \end{gathered}$$

Ou seja, em $x = 0$ a função assume valor 0 e a partir daí ela é sempre crescente, o que nos permite dizer que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, ou seja

$$e^x \geq x + 1 \text{ para } x \geq 0$$

■

Exercício 3 *Considere o retângulo que está inscrito no triângulo retângulo conforme a figura abaixo:*



Observe que

$$\begin{array}{c} h + h' = 8 \\ b + b' = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} h' = 8 - h \\ b' = 6 - b \end{array}$$

Usando semelhança de triângulo segue-se que

$$\frac{h'}{b} = \frac{h}{b'} \Leftrightarrow \frac{8-h}{b} = \frac{h}{6-b} \Leftrightarrow (8-h)(6-b) = bh$$

Ou seja,

$$4b + 3h = 24$$

e o retângulo terá sua área, dada em função da altura h, pela função

$$A(h) = hb = h\frac{24 - 3h}{4}$$

Para encontrarmos o seus extremos, basta resolvermos a equação

$$A'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(24 - 6h) = 0 \Leftrightarrow h = 4$$

Calculando A'' obtemos

$$A''(h) = -\frac{3}{2}$$

donde temos que

$$A''(4) = -\frac{3}{2} < 0$$

Logo $h = 4$ é um máximo da função $A(h)$ e as dimensões do retângulo procurado são $h = 4$ e $b = 3$.

■

Exercício 4

a). *Tome $u = \sqrt{x}$ e observe que*

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2udu = dx$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \int \frac{2udu}{u(1+u^2)} \\ &= 2\int \frac{du}{(1+u^2)} \\ &= 2\text{arctg } u + k \\ &= 2\text{arctg } \sqrt{x} + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). *Usando integração por partes, considere*

$$\begin{cases} u = \text{arcsen } x \\ dv = dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int \text{arcsen } x dx = x\text{arcsen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Usando agora integração por substituição, considere $z = 1 - x^2$ e observe que $dz = -2xdx$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1-x^2}dx &= -\int \frac{dz}{2\sqrt{z}} \\ &= -\sqrt{z} + k \\ &= -\sqrt{1-x^2} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

E, finalmente temos,

$$\begin{aligned} \int \text{arcsen } x dx &= x\text{arcsen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\text{arcsen } x + \sqrt{1-x^2} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Calculando a intersecção entre as curvas dadas teremos*

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \ e \ y = -1 \\ ou \\ x = 4 \ e \ y = 2 \end{array}$$

Usando integração em relação a variável y temos a área da região procurada dada por

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right) dy &= \tfrac{1}{2}y^2 + 2y - \tfrac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{2} \\ &= \tfrac{10}{3} - \left(-\tfrac{7}{6}\right) \\ &= \tfrac{20+7}{6} \\ &= \tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

■