**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2007**
**Data: Terça-feira, 23 de Outubro** **Turma C1**

---

**Exercício 1** *A reta tangente ao gráfico da função*

$$y = x^{-1} - x$$

*no ponto* $(1,0)$ *é dada por*

$$y - 0 = m(x-1) \tag{1}$$

*onde*

$$m = y'(1)$$

*Calculando* $y'$ *temos*

$$y'(x) = -x^{-2} - 1 = \frac{-1}{x^2} - 1$$

*Donde temos que*

$$m = y'(1) = -2$$

*e, voltando a equação* (1) *da reta que estamos procurando, teremos*

$$y = -2(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 \tag{2}$$

*Esta reta juntamente com os eixos coordenados formam um triângulo retângulo cuja base é a abcissa de sua intersecção com o eixo* $x$ *e altura é a ordenada de sua interseção com o eixo* $y$*. Para encontrarmos a interseção da reta* (2) *com o eixo* $x$*, fazemos* $y = 0$ *e obtemos* $x = 1$*, que é a* ***base*** *do triângulo. De modo análogo, para encontrarmos a interseção da reta* (2) *com o eixo* $y$*, fazemos* $x = 0$ *e obtemos* $y = 2$ *que é a* ***altura*** *do triângulo. Logo a área deste triângulo é*

$$\frac{\textbf{base} \times \textbf{altura}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Observe que*

**i.** $f(0) = 0$*, portanto* $f(0)$ *existe;*

**ii.** $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$*;*

**iii.** $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

*Assim, segue-se de (i),(ii), (iii) e da definição de continuidade de uma função num ponto, que* $f$ *é contínua em* $x = 0$.
*Por outro lado, observe que*

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

*donde, podemos-se ver que* $f'$ *existe para qualquer* $x \neq 0$*, ou seja* $f$ *não é diferenciável em* $x = 0$. $\blacksquare$

**Exercício 3**

**a).** *Dado que* $y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + 2}{x}$*, segue-se que*

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}x - \left(x^{\frac{3}{2}} + 2\right)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}x - x^{\frac{3}{2}} - 2}{x^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} - 2}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - 2}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^3} - 4}{2x^2} \end{aligned}$$

*Logo*

$$y'(1) = -\frac{3}{2}$$

$\square$

**b).** *Dado que* $y = \dfrac{\sec\, x}{1 + \mathrm{tg}\ x}$, *segue-se que*

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\sec\, x \mathrm{tg}\ x(1+\mathrm{tg}\ x) - \sec^3 x}{(1+\mathrm{tg}\ x)^2} \\ &= \frac{\sec\, x\mathrm{tg}\ x + \sec\, x\mathrm{tg}^2 x - \sec^3 x}{(1+\mathrm{tg}\ x)^2} \\ &= \frac{\sec\, x\mathrm{tg}\ x + \sec\, x\left(\sec^2 x - 1\right) - \sec^3 x}{(1+\mathrm{tg}\ x)^2} \\ &= \frac{\sec\, x\mathrm{tg}\ x + \sec^3 x - \sec\, x - \sec^3 x}{(1+\mathrm{tg}\ x)^2} \\ &= \frac{\sec\, x\mathrm{tg}\ x - \sec\, x}{(1+\mathrm{tg}\ x)^2} \\ &= \frac{\sec\, x\,(\mathrm{tg}\ x - 1)}{(1+\mathrm{tg}\ x)^2} \end{aligned}$$

*Logo*

$$y'(1) = \frac{\sec\, 1\,(\mathrm{tg}\ 1 - 1)}{(1+\mathrm{tg}\ 1)^2}$$

■

**Exercício 4** *Pelo que é dado no problema, se chamarmos de $x$ a distância da base da escada à parede e de $y$ a altura do topo da escada em relação ao chão, usando o teorema de Pitágoras, teremos que*

$$x^2 + y^2 = (1,7)^2 \tag{3}$$

*e quando $y = 0,8$ teremos $x = 1,5$. Derivando implicitamente a equação (3) com relação a $t$ teremos*

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

*Logo*

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{1,5}{0,8}0,5 = -\frac{15}{10}\frac{10}{8}\frac{1}{2} = -\frac{15}{16}m/s$$

■

**Exercício 5** *Suponha que a reta que procuramos seja*

- *tangente ao gráfico de $y = x^2 + 1$ no ponto cuja abcissa é $p$*
- *tangente ao gráfico de $y = -x^2 - 1$ no ponto cuja abcissa é $q$*

*Assim, esta reta passa pelo ponto $(p, p^2+1)$ com coeficiente angular $2p$ e pelo ponto $(q, -q^2-1)$ com coeficiente angular $-2q$, logo deverá ter equações*

$$y - (p^2+1) = 2p(x-p) \Leftrightarrow y = 2px - p^2 + 1 \tag{4}$$

*e*

$$y - (-q^2-1) = -2q(x-q) \Leftrightarrow y = -2qx + q^2 - 1 \tag{5}$$

*e estas equações devem ser iguais, ou seja*

$$\left\{ \begin{aligned} 2p &= -2q \\ -p^2 + 1 &= \quad q^2 - 1 \end{aligned} \right.$$

*Donde, resolvendo este sistema, encontramos $p = 1$ e $q = -1$ ou $p = -1$ e $q = 1$. Substituindo estes valores nas equações (4) e (5) teremos*

$$y = 2x \text{ ou } y = -2x$$

■