**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2007**
**Data: Segunda-feira, 10 de Setembro** **Profº. Edson**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que* $\cos 0 = 1$, *logo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

$\square$

**b).** *Observe que*

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2+x-6)$$

*e*

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x^2-4)$$

*Assim,*

$$\lim_{x\to 2} \tfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-2x^2-4x+8} = \lim_{x\to 2} \tfrac{(x-2)(x^2+x-6)}{(x-2)(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \tfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$$

*Observe novamente que*

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

*e*

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-2x^2-4x+8} &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2} \\ &= \tfrac{5}{4}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Para mostrar que a função* $f$ *é contínua em* $x = 1$ *precisamos mostrar que*

**i.** $f(1)$ *existe;*

**ii.** $\lim_{x\to 1} f(x)$ *existe;*

**iii.** $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

*Para provar o item* $(i)$, *observe que*

$$|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$$

*para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *e como o* $f(1)$ *é usado nesta expressão, segue-se que* $f(1)$ *existe.*

*Além disto temos que*

$$|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-(x-1)^2 \leq f(x) - f(1) \leq (x-1)^2$$

*Observe agora que*

$$\lim_{x\to 1} \left[-(x-1)^2\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$$

*logo, pelo teorema do confronto segue-se que*

$$\lim_{x\to 1} [f(x) - f(1)] = 0$$

*ou seja,*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*o que prova os itens* $(ii)$ *e* $(iii)$ *e conseqüentemente prova que a função* $f$ *é contínua em* $x = 1$. $\blacksquare$

**Exercício 3**

**a).**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\text{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\text{sen } h}{h} \cdot \frac{\text{sen } h}{\cos h + 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

**b).** *Considere*

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + h\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{h}$$

*Temos que*

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\cos h + \operatorname{sen}\, h \cos\frac{\pi}{8} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{8}\tfrac{(\cos h - 1)}{h} + \cos\tfrac{\pi}{8}\tfrac{\operatorname{sen}\, h}{h}\right] \\ &= \cos\tfrac{\pi}{8} \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Por hipótese temos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

*Desejamos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{x}$$

*Para isto, tome* $y = x^2$ *e observe que*

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

*e*

$$x = \pm\sqrt{y}$$

*Assim temos que*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x^2)}{x} &= \lim_{y\to 0} \tfrac{f(y)}{\pm\sqrt{y}} \\ &= \lim_{y\to 0} \pm\sqrt{y}\tfrac{f(y)}{y} \\ &= 0\cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

■

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt{1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

*b). Tome* $y = 2x$ *e observe que*

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

*e alé, disto, temos*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}} \\ &= \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^2 \\ &= e^2 \end{aligned}$$

■