Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final **2007**
Data: Terça-feira, 11 de Dezembro **Turma A1**

Exercício 1

a). *Observe que, quando $x \to 1$,*

$$x^{100} - x^2 + x - 1 \to 0$$

e

$$x^{10} - 1 \to 0$$

Logo, usando a regra de L'Hospital, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \tfrac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1} &= \lim_{x\to 1} \tfrac{100x^{99}-2x+1}{10x^9} \\ &= \tfrac{99}{10} \end{aligned}$$

□

b). *Observe que, quando $x \to +\infty$,*

$$\ln x \to +\infty$$

e

$$e^{3x} \to +\infty$$

Portanto, usando a regra de L'Hospital, segue-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3xe^{3x}} = 0$$

■

Exercício 2 *Sabe-se que*

$$\frac{dx}{dt} = 5m/s,$$

e que

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

usando a regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

e, quando $x = 10m$, temos então

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-20}{(101)^2}5 = -\frac{100}{(101)^2}m/s$$

■

Exercício 3 *Sabemos que*

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

a). *O estudo de crescimento e decrescimento da função f pode ser obtido através do estudo de sinal da função f'. Para tanto, observe que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2-(x-1)(2x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2-2x^2+2x}{x^4} \\ &= \frac{-x^2+2x}{x^4} \end{aligned}$$

Como $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o estudo de sinal da função f' pode ser reduzido ao estudo de sinal da função

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

e como se trata de uma função de segundo frau, temos que

$g(x) > 0$ *para* $x \in (0,2)$

$g(x) < 0$ *para* $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

Ou seja,

f *é crescente em* $(0,2)$

f *é decrescente em* $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

□

b). *O estudo de concavidades da função f pode ser obtido através do estudo de sinal da função f''. Para tanto observe que*

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

e portanto

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-x^3-(2-x)(3x^2)}{x^6} \\ &= \frac{-x^3-6x^2+3x^3}{x^6} \\ &= \frac{2x^3-6x^2}{x^6} \\ &= \frac{2x-6}{x^4} \end{aligned}$$

Novamente, como $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *o estudo de sinal da função* f'' *pode ser reduzido ao estudo de sinal da função*

$$h(x) = 2x-6$$

e como se trata de uma função do primeiro grau, temos que

$$h(x) > 0 \text{ para } x \in (3,+\infty)$$

$$h(x) < 0 \text{ para } x \in (-\infty,3)$$

Assim,

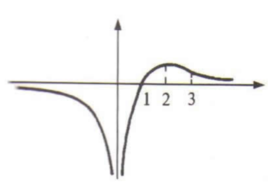
$$f \text{ possui concavidade para cima em } (3,+\infty)$$

$$f \text{ possui concavidade para baixo em } (-\infty,3)$$

□

c). *Como em* $x = 3$ *acontece o encontre de duas concavidades de nomes contrários, segue-se que* $x = 3$ *é um ponto de inflexão da função* f. *E como isto só ocorre uma vez, ele é único.* □

d). *Juntando o que foi obtido nos itens anterios, um esboço do gráfico seria*



Exercício 4 *Suponha que a caixa que desejamos construir tenha como base um quadrado de lado* l *e sua altura seja* h. *Assim, o seu volume seria*

$$V = l^2h$$

mas, por outro lado sabemos que

$$V = 4000$$

Logo, segue-se que

$$l^2h = 4000 \Leftrightarrow h = \frac{4000}{l^2}$$

A área da superfície desta caixa é

$$A = 2l^2 + 4lh$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A(l) &= 2l^2 + 4l\frac{4000}{l^2} \\ &= 2l^2 + \frac{16000}{l} \end{aligned}$$

Para descobrirmos os extremos desta função, precisamos resolver a equação

$$A'(l) = 0$$

que é equivalente a

$$4l - \frac{16000}{l^2} = 0 \Leftrightarrow l^3 = 4000 \Leftrightarrow l = 10\sqrt[3]{4}$$

Observe ainda, que

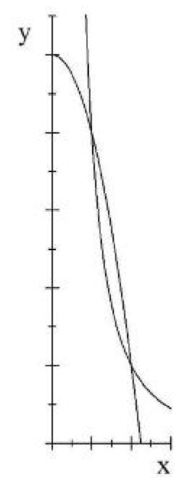
$$A''(l) = 4 + \frac{32000}{l^3}$$

e

$$A''(10\sqrt[3]{4}) = 12 > 0$$

e isto significa que $l = 10\sqrt[3]{4}$ *realmente é um minmizante para a a função* A. *Assim as dimensões da caixa são* $l = 10\sqrt[3]{4}cm$ *e* $h = \frac{4000}{l^2} = 10\sqrt[3]{4}$. ■

Exercício 5 *Fazendo esboço do gráfico das duas curvas obtemos*



Calculando a interseção entre as duas curvas temos

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = 5-4x^2 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x^2} = 5 - 4x^2 &\quad \Leftrightarrow \\ x^2(5 - 4x^2) = 1 &\quad \Leftrightarrow \\ 5x^2 - 4x^4 - 1 = 0 &\quad \Leftrightarrow \\ x = \pm\tfrac{1}{2} \text{ ou } x = \pm 1 & \end{aligned}$$

Como $x > 0$ temos que a área da região em questão sera pada por

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(5 - 4x^2 - \tfrac{1}{x^2}\right) dx &= 5x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \tfrac{14}{3} - \tfrac{13}{3} \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

■