Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 3^a Prova **2007**
Data: Sábado, 01 de Dezembro **Turma A1**

Exercício 1 a). *Sabendo que*

$$f(x) = 5 + 12x - 5x^3$$

segue-se que

$$f'(x) = 12 - 15x^2$$

e

$$f''(x) = -30x$$

O estudo de crescimento e decrescimento da função f pode ser feito através do estudo de sinal da função f'. Para tanto, observe que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 15x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

e como f' é uma função do segundo grau com concavidade voltada para baixo, segue-se que

$$\begin{array}{l} f'(x) > 0 \ \textit{se}\ x \in \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right) \\ f'(x) < 0 \ \textit{se}\ x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, +\infty\right) \end{array}$$

Logo,

$$\begin{array}{l} f \ \textit{é crescente em}\ \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right) \\ f \ \textit{é decrescente em}\ \left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, +\infty\right) \end{array}$$

De modo semelhante, o estudo de concavidades da função f pode ser obtido através do estudo de sinal da função f''. Para tanto, observe que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -30x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

e como f'' é uma função do primeiro grau decrescente, segue-se que

$$\begin{array}{l} f''(x) > 0 \ \textit{se}\ x \in (-\infty, 0) \\ f''(x) < 0 \ \textit{se}\ x \in (0, +\infty) \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{l} f \ \textit{possui concavidade p/cima em}\ (-\infty, 0) \\ f \ \textit{possui concavidade p/baixo em}\ (0, +\infty) \\ f \ \textit{possui ponto de inflexão p/}\ x = 0 \end{array}$$

Em resumo, temos

a). $\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$;

b). $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, +\infty\right)$;

c). $(0, +\infty)$;

d). $(-\infty, 0)$;

e). $x = 0$.

■

Exercício 2 *Mostrar que*

$$\ln(x+1) \leq x \ \textit{para}\ x \geq 0$$

é equivalente a mostrar que

$$\ln(x+1) - x \leq 0 \ \textit{para}\ x \geq 0$$

Para isto vamos fazer o estudo de crescimento da função

$$f(x) = \ln(x+1) - x$$

a fim de provar que

$$f(x) \leq 0 \ \textit{para}\ x \geq 0$$

Observe então, que

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$$

e

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Como f' é um quociente de duas funções do primeiro grau, através da análise do estudo de sinal de ambas, chegamos a seguinte conclusão

$$f'(x) > 0 \ \textit{se}\ x \in (-1, 0)$$

$$f'(x) < 0 \ \textit{se}\ x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

Assim, segue-se que

$$\begin{array}{l} f \ \textit{é crescente em}\ (-1, 0) \\ f \ \textit{é decrescente em}\ (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ f(0) = 0 \end{array}$$

e como conseqüência temos que

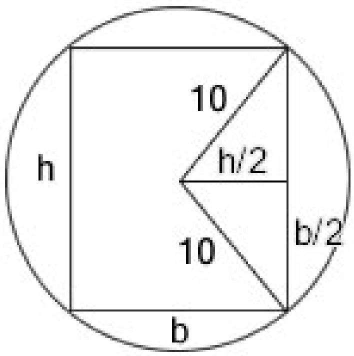
$$f(x) \leq 0 \ \textit{para}\ x \geq 0$$

Ou seja,

$$\ln(x+1) \leq x \ \textit{para}\ x \geq 0$$

■

Exercício 3 *Considere o retângulo que está inscrito na circunferência tende base b e altura h conforme está na figura abaixo:*



Usando o teorema de Pitágoras temos a seguinte relação

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 100$$

Ou seja,

$$h^2 + b^2 = 400 \Leftrightarrow b = \sqrt{400 - h^2}$$

e o retângulo terá sua área, dada em função da altura h, pela função

$$A(h) = h\sqrt{400 - h^2}$$

Para encontrarmos o seus extremos, basta resolvermos a equação

$$A'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{h^2 - 200}{\sqrt{400 - h^2}} = 0 \Leftrightarrow h = 10\sqrt{2}$$

Calculando A'' obtemos

$$A''(h) = \frac{2h(h^2 - 600)}{\sqrt{(400 - h^2)^3}}$$

donde temos que

$$A''\left(10\sqrt{2}\right) = -4 < 0$$

Logo $h = 10\sqrt{2}$ é um máximo da função $A(h)$ e as dimensões do retângulo procurado são $b = 10\sqrt{2}$ e $h = 10\sqrt{2}$. ■

Exercício 4

a). *Tome $y = \ln x$ e observe que*

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{dy}{y} \\ &= \ln |y| + k \\ &= \ln |\ln x| + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). *Usando integração por partes, considere*

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = 2xdx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int e^{-x}xdx$$

Usando novamente integração por partes, considere

$$\begin{cases} z = x \\ dw = e^{-x}dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} dz = dx \\ w = -e^{-x} \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int e^{-x}xdx &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + k \\ &= -e^{-x}(x+1) + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

E finalmente temos,

$$\begin{aligned} \int x^2e^{-x}dx &= -x^2e^{-x} + 2\int e^{-x}xdx \\ &= -x^2e^{-x} - 2e^{-x}(x+1) + k \\ &= -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + k \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Calculando a intersecção entre as curvas dadas teremos*

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y \ = 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=1 \ \ e \ y=-2 \\ ou \\ x=4 \ \ e \ y=4 \end{array}$$

Usando integração em relação a variável y temos a área da região procurada dada por

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{4} \left(\tfrac{y+4}{2} - \tfrac{y^2}{4}\right) dy &= \tfrac{1}{4}\int_{-2}^{4} \left(2y+8-y^2\right) dy \\ &= \tfrac{1}{4}\left(y^2+8y-\tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-2}^{4} \\ &= \tfrac{20}{3}+\tfrac{7}{3} \\ &= 9 \end{aligned}$$

■