Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1^{a} Prova **2007**
Data: Segunda-feira, 10 de Setembro **Prof^{o}. Edson**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$x \to -2^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x+2 \to 0^+$$

Logo

$$\lim_{x \to -2^+} \ln(x+2) = -\infty$$

□

b). *Observe que*

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)(x^2 - x - 2)$$

e

$$8x - 5x^2 + x^3 - 4 = (x-2)(x^2 - 3x + 2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \tfrac{x^3-3x^2+4}{8x-5x^2+x^3-4} &= \lim_{x\to 2} \tfrac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x^2-3x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \tfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} \end{aligned}$$

Observe novamente que

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

e

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{8x-5x^2+x^3-4} &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Para mostrar que a função f é contínua em $x = 1$ precisamos mostrar que*

i. *$f(0)$ existe;*

ii. *$\lim_{x\to 0} f(x)$ existe;*

iii. *$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.*

Para provar o item (i), observe que

$$|f(x)| \leq x^2$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, logo esta expressão também será verdadeira para $x = 0$ o que que no dá a seguinte expressão

$$|f(0)| \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(0) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Portanto, $f(0)$ existe e é igual a zero.

Além disto temos que

$$|f(x)| \leq x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

Observe agora que

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

logo, pelo teorema do confronto segue-se que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(0)$$

o que prova os itens (ii) e (iii) e conseqüentemente prova que a função f é contínua em $x = 0$. ■

Exercício 3

a).

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\cdot\frac{\cos h+1}{\cos h+1}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\text{sen}^2 h}{h(\cos h+1)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\text{sen }h}{h}\cdot\frac{\text{sen }h}{\cos h+1}$$
$$= 0$$

□

b). *Considere*

$$A = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{10}+h\right)-\cos\frac{\pi}{10}}{h}$$

Temos que

$$A = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{10}\cos h - \text{sen }\frac{\pi}{10}\text{sen }h - \cos\frac{\pi}{10}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos\frac{\pi}{10}\frac{(\cos h-1)}{h} - \text{sen }\frac{\pi}{10}\frac{\text{sen }h}{h}\right]$$
$$= -\text{sen }\frac{\pi}{10}$$

■

Exercício 4 *Por hipótese temos que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$$

Então

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(7x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{7f(7x)}{3\cdot 7x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{7}{3}\frac{f(7x)}{7x}$$
$$= \frac{7}{3}$$

■

Exercício 5

a).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\frac{1}{x^2}\left(x^2+3\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}}{1+\frac{3}{x^2}}$$
$$= \frac{0}{1}$$
$$= 0$$

□

b).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$$

Tome $y = x+1$ *e observe que*

$$x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$
$$= e$$

■