Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2007**
Data: Segunda-feira, 09 de Julho **Profº. Edson**

Exercício 1

a).

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x - x^2}{x\text{sen } x}$$

Observe que

$$\text{sen } x - x^2 \to 0 \textit{ quando } x\to 0$$

e

$$x\text{sen } x \to 0 \textit{ quando } x\to 0$$

Assim, usando a Regra de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x - x^2}{x\text{sen } x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 2x}{\text{sen } x + x\cos x}\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$x\to 0^+ \Rightarrow \text{sen } x + x\cos x \to 0^+$$

e

$$x\to 0^- \Rightarrow \text{sen } x + x\cos x \to 0^-$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=-\infty$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=\nexists$$

□

b). Observe que

$$\sqrt[3]{x+2}-1\to 0 \textit{ quando } x\to -1$$

e

$$x+1\to 0 \textit{ quando } x\to -1$$

Assim, usando a Regra de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}\\ &= \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Para que a função f seja contínua em $x=3$, devemos ter*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

ou seja

$$\lim_{x\to 3} f(x) = L$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned}L=\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3} f(x)\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

■

Exercício 3

a). Considerando $f(x)=2^x$ temos que

$$f^{'}(x)=2^x[x\ln 2]^{'}=2^x\ln 2$$

□

b). Considerando $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, segue-se que

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

■

Exercício 4 *Suponha que o cilindro em questão tenha raio r e altura h. Assim, se considerarmos A_l, A_f e A_t sendo as áreas laterail, do fundo e da tampa do cilindro, respectivamente, teremos que*

$$\begin{aligned} A_l &= 2\pi r h \\ A_f &= \pi r^2 \\ A_t &= \pi r^2 \end{aligned}$$

e com isto, dado que o preço do material usado na lateral e no fundo do cilindro é de $R\$ \ 10$ por metro quadrado e $R\$20$ por metro quadrado para o material usado na tampa, segue-se que o custo para a construção de um cilidro é de:

$$\begin{aligned} C &= 10(2\pi r h + \pi r^2) + 20\pi r^2 \\ &= 20\pi r h + 30\pi r^2 \end{aligned}$$

Mas, como o volume do cilidro deve ter $1m^3$, então

$$\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

ou seja

$$C(r) = \frac{20}{r} + 30\pi r^2$$

Observe que

$$C'(r) = -\tfrac{20}{r^2} + 60\pi r$$

$$C''(r) = \tfrac{40}{r^3} + 60\pi$$

Determinando os candidatos a extemos,

$$C'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}$$

Classificando,

$$C''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}\right) = 180\pi > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}} \text{ é mínimo}$$

Assim, as dimensões do cilindro que minimizam o custo de sua confecção são $r = \sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}$ e $h = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$. ■

Exercício 5

a).

$$\begin{aligned} \int \tfrac{x^2+1}{x} dx &= \int \left(\tfrac{x^2}{x} + \tfrac{1}{x}\right) dx \\ &= \int \left(x + \tfrac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln\ |x| + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned} \int \tfrac{e^x + e^{-x}}{2} dx &= \tfrac{1}{2}\int (e^x + e^{-x})\, dx \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■