Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2007**
Data: Quarta-feira, 13 de Junho **Prof^o. Edson**

Exercício 1

a). Observe que

$$\text{tg}\pi x \to 0 \text{ quando } x \to 0$$

e

$$\ln(1+x) \to 0 \text{ quando } x \to 0$$

Assim, usando a Regral de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\pi x}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\pi\sec^2\pi x}{\frac{1}{1+x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\pi\sec^2\pi x(1+x)\\ &= \pi\end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$1-\cos x \to 0 \text{ quando } x \to 0$$

e

$$x^2 + x \to 0 \text{ quando } x \to 0$$

Assim, usando a Regral de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{2x+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A reta tangente ao gráfico da parábola $y = 1 - x^2$ no ponto $Q = (p, 1-p^2)$ tem coeficiente angular $m = -2p$ e seu equação é dada por*

$$y - (1-p^2) = -2p(x-p)$$

ou seja

$$y = -2px + p^2 + 1$$

A interseção desta reta com o eixo x é o ponto $M = (x_0, 0)$,onde

$$0 = -2px_0 + p^2 + 1 \Rightarrow x_0 = \frac{p^2+1}{2p}$$

ou seja, $M = (\frac{p^2+1}{2p}, 0)$. De modo análogo, a interseção com o eixo y é o ponto $N = (0, y_0)$, onde

$$y_0 = p^2 + 1,$$

ou seja, $N = (0, p^2+1)$. Assim, o triângulo de vértices O, M e N, onde O é a origem do plano, possui área

$$A(p) = \frac{(p^2+1)^2}{4p}$$

Para encontrarmos o p tal que $A(p)$ sejá mínimo devemos resolver a equação

$$A'(p) = 0$$

então, resolvendo teremos

$$\begin{aligned}\frac{16p^2(p^2+1) - 4(p^2+1)^2}{16p^2} = 0 \quad &\Leftrightarrow\\ 16p^2(p^2+1) - 4(p^2+1)^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow\\ 16p^2(p^2+1) = 4(p^2+1)^2 \quad &\Leftrightarrow\\ 16p^2 = 4(p^2+1) \quad &\Leftrightarrow\\ 4p^2 = p^2 + 1 \quad &\Leftrightarrow\\ 3p^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow\\ p = \tfrac{\sqrt{3}}{3} &\end{aligned}$$

Então, o ponto da parábola que é cadidato a minimizar a área do triângulo em questão é

$$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Observe que

$$A''(p) = \frac{3p^4+1}{2p^3}$$

e

$$A''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$$

Logo, Q é um ponto de mínimo. ■

Exercício 3 *Observe que a parábola* $y = 2 + x - x^2$ *possui raízes* $x_1 = -1$ *e* $x_2 = 2$ *e sua concavidade é voltada para baixo. Logo,*

$$\int_a^b (2 + x - x^2)dx \leq 0 \text{ se } [a, b] \subset (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

e

$$\int_a^b (2 + x - x^2)dx \geq 0 \text{ se } [a, b] \subset [-1, 2]$$

Assim, a integral terá valor máximo se $a = -1$ *e* $b = 2$. ■

Exercício 4

a).

$$\begin{aligned} \int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}\Big|_4^9 \\ &= (18 + 6) - (\tfrac{16}{3} + 4) \\ &= \frac{44}{3} \end{aligned}$$

□

b). Observe que, para $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, *vale*

$$|\text{sen } x| = \begin{cases} \text{sen } x, & se\ 0 \leq x \leq \pi \\ -\text{sen } x, & se\ \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\text{sen } x|\, dx &= \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\text{sen } x|\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen } x dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\text{sen } x) dx \\ &= -\cos x\big|_0^{\pi} + \cos x\big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= +1 + 1 + 0 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Seja* F *uma primitiva da função* f, *ou seja*

$$F'(t) = f(t),\ t \in [0, x^2]$$

Então,

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(0)$$

Mas, por outro lado

$$x\text{sen } \pi x = \int_0^{x^2} f(t)dt$$

Assim, temos que

$$x\text{sen } \pi x = F(x^2) - F(0)$$

Derivando esta expressão com relação em ambos os lados temos

$$\text{sen } \pi x + \pi x \cos \pi x = 2xF'(x^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{sen } \pi x + \pi x \cos \pi x = 2xf(x^2)$$

Quando $x = 2$, *temos*

$$\text{sen } 2\pi + 2\pi \cos 2\pi = 4f(4) \Rightarrow f(4) = \frac{\pi}{2}$$

■