Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2007**
Data: Segunda, 30 de Abril **Prof^{o}. Edson**

Exercício 1

a). tome

$$u = \sqrt[3]{x}$$

e observe que

$$x = u^3$$

$$x \to 3 \Rightarrow u \to \sqrt[3]{3} com$$

com isto, teremos que

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x-3} = \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{u - \sqrt[3]{3}}{u^3 - 3}$$

Usando a divisão de polinômios, temos que

$$u^3 - 3 = (u - \sqrt[3]{3}) \left(u^2 + \sqrt[3]{3}u + \sqrt[3]{9}\right)$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x-3} &= \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{u - \sqrt[3]{3}}{u^3-3} \\
&= \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{u - \sqrt[3]{3}}{(u - \sqrt[3]{3})\left(u^2 + \sqrt[3]{3}u + \sqrt[3]{9}\right)} \\
&= \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{1}{u^2 + \sqrt[3]{3}u + \sqrt[3]{9}} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9}
\end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2

a).

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+9} = \frac{3^2-9}{3^2+9} = \frac{0}{18} = 0$$

□

b).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2x} \frac{1}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{2x\,(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que:*

- *Se $x < 1 \Rightarrow f(x) = -2x-2$, ou seja, se $x < 1$ a função f é polinomial e portanto, contínua em $(-\infty, 1)$.*
- *Se $1 < x < 4 \Rightarrow f(x) = x^2 + bx + c$, ou seja, se $1 < x < 4$ a função f é polinomial e portanto contínua em $(1, 4)$.*
- *Se $x > 4 \Rightarrow f(x) = 5x - 15$, ou seja, se $x > 4$ a função f é polinomial e portanto contínua em $(4, +\infty)$.*

Desta forma temos que a função f, da forma como está definida, sem sabermos os valores de b ou c, já é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$, o que nos leva a concluir que, para a função f ser contínua em *todo o conjunto $\mathbb{R}$ resta apenas, que seja continua em $x=1$ e $x=4$.*

Para que f seja continua em $x=1$ devemos ter que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

ou seja

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad &\Leftrightarrow \\
\lim_{x\to 1} x^2 + bx + c = -4 \quad &\Leftrightarrow \\
1 + b + c = -4 \quad &\Leftrightarrow \\
b + c = -5 &
\end{aligned} \tag{1}$$

Para que f seja continua em $x=4$ devemos ter que

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

ou seja

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) \quad &\Leftrightarrow \\
\lim_{x\to 4} x^2 + bx + c = 5 \quad &\Leftrightarrow \\
16 + 4b + c = 5 \quad &\Leftrightarrow \\
4b + c = -11 &
\end{aligned} \tag{2}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2) teremos

$$c = -3$$

$$b = -2$$

■

Exercício 4

a).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{tg} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\dfrac{1}{\cos x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\dfrac{1}{\cos x}} \\
&= \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= \frac{1+1}{0-1} = -2
\end{aligned}$$

■

Exercício 5

a).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} &= \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}} &= \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1-(x+3)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}} &= \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}} &= 0
\end{aligned}$$

□

b).

$$\lim_{x\to 0} (1+2x)^x = (1+0)^0 = 1^0 = 1$$

■