Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2005**
Data: Quinta-feira, 11 de Maio **Turma C1**

Exercício 1

a).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}\right)'}{(x-p)'}\\ &= \lim_{x\to p}\frac{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{1}\\ &= \frac{1}{n}p^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

$\square$

b).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x\end{aligned}$$

assim, tomando-se

$$y = x+1$$

segue-se que

$$x = y-1$$

e $y\to+\infty$ quando $x\to+\infty$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\tfrac{x+2}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y-1}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{y}\right)^y\left(1+\tfrac{1}{y}\right)^{-1}\\ &= e\cdot 1\\ &= e\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Sabe-se que*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x, & se\ x\le 1\\ 5x-1, & se\ x>1\end{cases}$$

Assim temos que,

- *para* $x>1 \Rightarrow f(x)=5x-1 \Rightarrow f'(x)=5.$
- *para* $x<1 \Rightarrow f(x)=x^2+3x \Rightarrow f'(x)=2x+3.$
- *para* $x=1 \Rightarrow f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
  - *para* $h\to 0^+ \Rightarrow 1+h>1$, *logo*

    $$f'(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{5h+5-1-4}{h}=5$$

  - *para* $h\to 0^- \Rightarrow 1+h<1$, *logo*

    $$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+5h+4-4}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-} h+5\\ &= 5\end{aligned}$$

Calculando f'':

- *para* $x>1 \Rightarrow f'(x)=5 \Rightarrow f''(x)=5.$
- *para* $x<1 \Rightarrow f'(x)=2x+3. \Rightarrow f''(x)=2.$
- *para* $x=1 \Rightarrow f''(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$
  - *para* $h\to 0^+ \Rightarrow 1+h>1$, *logo*

    $$f''(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{5-5}{h}=0$$

  - *para* $h\to 0^- \Rightarrow 1+h<1$, *logo*

    $$f''(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h+5-5}{h}=2$$

  - *Logo* $f''(1)=\nexists.$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Calculando A e B:*

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -1$$

Logo $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 4)$.
Como P está sobre a parábola $y = x^2$ segue-se que $P = (a, a^2), a \in \mathbb{R}$. Assim

$$A(x) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-3a^2 + 3a + 6\right)$$

Então

$$A'(x) = \tfrac{1}{2}(-6a + 3)$$

$$A''(x) = \tfrac{1}{2}(-6) = -3$$

Ou seja:

$$A'(a) = 0 \Rightarrow 3 - 6a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$A''(\frac{1}{2}) = -3 < 0$$

Portanto, $P = (a, a^2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é o ponto que maximiza a área do triângulo ΔBAP. ■

Exercício 4

a). $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x} dx$, *tome*

$$y = \cos x$$

e observe que

$$dy = -\text{sen } x dx$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{-dy}{y^3} \\ &= \int -y^{-3} dy \\ &= \frac{-y^{-2}}{-2} + k \\ &= \frac{1}{2y^2} + k. \\ &= \frac{1}{2\cos^2 x} + k \\ &= \tfrac{1}{2}\sec^2 x + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). $\displaystyle\int x \ln x dx$; *usando integração por partes, tome:*

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Então:

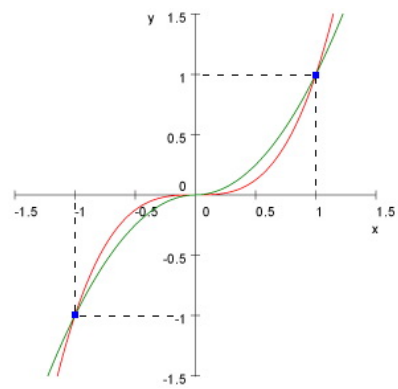
$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \tfrac{x^2}{2}\ln x - \int \tfrac{x^2}{2}\tfrac{1}{x} dx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{1}{2}\int x dx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + k \\ &= \tfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right) + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x^2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^3$$



Pelo gráfico acima, podemos ver que a área A que estamos procurando é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= 2\int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \left|x^2 - x^3\right| dx \\ &= 2\left|\int_{0}^{1} x^2 - x^3 dx\right| \\ &= 2\left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\ &= 2(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) \\ &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

■