Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 3^{a} Prova **2005**
Data: Quinta-feira, 12 de Maio **Turma C1**

Exercício 1 *Temos que* $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. *Então,*

a).

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

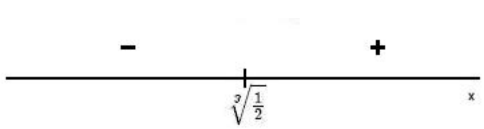
Considere a função

$$g(x) = 2x^3 - 1,$$

como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *segue-se que, o estudo de sinal de* f' *é completamente determinado pelo estudo de sinal da função* g. *Ou seja,*

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

donde:



ou seja:

$$f \text{ é crescente para } x > \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

$$f \text{ é decrescente para } x < \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

$\square$

b).

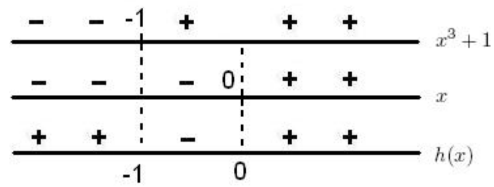
$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^2}\frac{x^3 + 1}{x}$$

Considere a função

$$h(x) = \frac{x^3 + 1}{x},$$

como $\frac{2}{x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *segue-se que, o estudo de sinal de* f'' *é completamente determinado pelo estudo de sinal da função* h. *Então:*

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$



Assim, f *possui concavidade para cima em*

$$(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

e concavidade para baixo em $(-1, 0)$ $\square$

c).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

isto é, $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ *é o único ponto crítico de* f.

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 2 + \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3} = 2 + 4 = 6 > 0$$

o que implica dizer, que $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ *é ponto de mínimo da função* f.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 + \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -1$$

logo, $x = -1$ *é ponto de inflexão da função* f. $\square$

d). Observe que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + \tfrac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 + \tfrac{1}{x} = -\infty$$

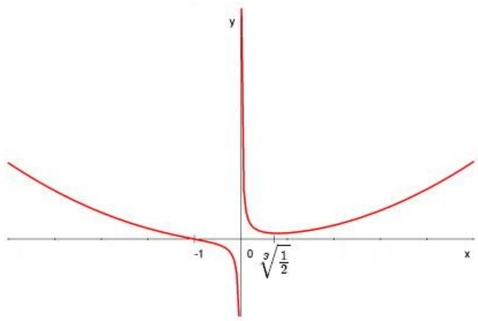
Portanto, $x = 0$ *é uma assíntota vertical de* f.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \tfrac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + \tfrac{1}{x} = +\infty$$

Portanto, f *não possui assíntota horizontal.* $\square$

e). Esboçando o gráfico da função f temos



■

Exercício 2

a).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^2+1\right)\dfrac{1}{\ln x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+1\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{2x^2}{x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{4x}{2x}}\\ &= e^2\end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to0^-} e^{\ln(1-\cos x)\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

□

c).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\operatorname{sen} x\ln x &= \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

d).

$$\lim_{x\to0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

■

Exercício 3 *A equação da reta tangente ao gráfico de f, que passa pelo ponto $P=(a,f(a))=(a,1-a^2)$ e possui coeficiente angular $m=f'(a)=-2a$ é dada por*

$$y-\left(1-a^2\right)=-2a\,(x-a)\Rightarrow y=-2ax+a^2+1$$

Calculando a interseção desta reta com os eixos coordenados encontramos os pontos:

$$A=\left(\frac{a^2+1}{2a},0\right)\ e\ B=(0,a^2+1).$$

Desta forma, a área A do triângulo ΔOAB é dado por

$$A(a)=\frac{\frac{a^2+1}{2a}a^2+1}{2}=\frac{\left(a^2+1\right)^2}{4a}$$

Para determinarmos seu máximo, basta derivar e igualar a zero, ou seja:

$$\begin{aligned}A'(a)=0 &\Rightarrow \frac{16a^2(a^2+1)-4\left(a^2+1\right)^2}{16a^2}=0\\ &\Rightarrow 16a^2(a^2+1)=4\left(a^2+1\right)^2\\ &\Rightarrow 4a^2=a^2+1\\ &\Rightarrow 3a^2=1\\ &\Rightarrow a=\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\end{aligned}$$

Como $0 \leq a \leq 1$, *segue-se que* $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ *e a equação da reta tangente que estamos procurando é dada por:*

$$y = -2ax + a^2 + 1 \Rightarrow y = -2\sqrt{\frac{1}{3}}x + \frac{4}{3}$$

$\blacksquare$

Exercício 4

a). $\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx$, *tome* $y = x^2 + 3$ *e observe que*

$$dy = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dy}{2}$$

$$y = 3 \text{ quando } x = 0$$

$$y = 4 \text{ quando } x = 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx &= \tfrac{1}{2}\int_3^4 \sqrt{y}dy \\ &= \tfrac{1}{3}\sqrt{y^3}\Big|_3^4 \\ &= \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{3^3}\right) \\ &= \tfrac{8}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\square$

b). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x dx$. *Inicialmente lembre-se que*

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

e portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(x - \frac{\text{sen } 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$\square$

c).

$$\int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = \frac{4-1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}$$

$\square$

d). $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$ *tome* $y = 1 + x^2$ *e observe que*

$$dy = 2xdx$$

$$y = 1 \text{ quando } x = 0$$

$$y = 2 \text{ quando } x = 1$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx &= \int_1^2 \frac{1}{y}dy \\ &= \ln y|_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 5

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi\int_0^2 x(\tfrac{x^2}{2} + 1)dx = 8\pi \\ V_2 &= 2\pi\int_1^2 x(x^2 - 1)dx = \tfrac{9\pi}{2} \\ V &= V_2 - V_1 \\ &= 8\pi - \frac{9\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} \end{aligned}$$

$\blacksquare$