Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2005**
Data: Quarta-feira, 11 de Maio **Turma C1**

Exercício 1

a). $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$. *Observe que*

$$\frac{x^5-1}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1.$$

Então

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1\\ &= 1+1+1+1+1\\ &= 5.\end{aligned}$$

$\square$

b). Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x+1)}{(x-1)}\\ &= \tfrac{1+1+1}{-1-1}\\ &= \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

$\square$

c).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}\\ &= \tfrac{-1}{4}.\end{aligned}$$

$\square$

d).

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3}{x+3} = \frac{6}{6} = 1$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Para que f seja contínua em $x=5$, temos que mostrar que*

i). $f(5)$ *existe;*

ii). $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x)$*;*

iii). $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$

Para provarmos o item (i), observe que, pela definição da função f temos que $f(5)=L$, o que mostra que $f(5)$ existe.
Para a demonstração do item (ii), observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^\pm} f(x) &= \lim_{x\to 5^\pm}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}\\ &= \lim_{x\to 5^\pm}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}\\ &= \lim_{x\to 5^\pm}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{10}\right)}{x-5}\\ &= \lim_{x\to 5^\pm}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{10}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}}\\ &= \lim_{x\to 5^\pm}\frac{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{10}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\\ &= \tfrac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

E finalmente, do item (iii) segue-se que

$$\lim_{x\to 5} f(x) = f(5) \Rightarrow \sqrt{2} = L.$$

Ou seja, para que a função f seja contínua em $x=5$, devemos ter $L=\sqrt{2}$. $\blacksquare$

Exercício 3

a).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg }3x}{\text{sen }4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{tg }3x}{\text{sen }4x}\frac{4x}{4x}\frac{3x}{3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{\cos 3x\text{sen }4x}\frac{4x}{4x}\frac{3x}{3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{3x}\frac{4x}{\text{sen }4x}\frac{1}{\cos 3x}\frac{3}{4}\\ &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot \tfrac{3}{4}\\ &= \tfrac{3}{4}\end{aligned}$$

□

b).

$$\lim_{x\to 0} x\text{sen }\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

■

Exercício 4 *Queremos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} = \frac{1}{6}$$

Para isto, observe que $b\sqrt{x+3}-a = 0$ *para* $x = 1$ *pois, caso contrário*

$$\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} = \pm\infty$$

Assim,

$$b\sqrt{1+3}-a = 0 \Rightarrow 2b-a = 0 \Rightarrow a = 2b$$

E o limite acima pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-2b}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1} b\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right)\end{aligned}$$

tome $y = \sqrt{x+3}$, *e observe que*

$$x = y^2 - 3$$

e

$$y \to 2 \text{ quando } x \to 1$$

Logo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} b\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right) &= \lim_{y\to 2} b\left(\frac{y-2}{y^2-3-1}\right)\\ &= \lim_{y\to 2} b\left(\frac{y-2}{y^2-4}\right)\\ &= \lim_{y\to 2} b\frac{y-2}{(y+2)(y-2)}\\ &= \lim_{y\to 2}\frac{b}{(y+2)}\\ &= \tfrac{b}{4}\end{aligned}$$

Então, para que

$$\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} = \frac{1}{6}$$

Devemos ter

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow b = \frac{2}{3} \text{ e } a = 2b = \frac{4}{3}$$

■

Exercício 5

a).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}\frac{\text{sen }x}{x}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= 1\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg }x - \text{sen }x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen }x}{\cos x} - \text{sen }x}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x - \cos x\text{sen }x}{x^3\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}\\ &= 1\cdot \tfrac{1}{2}\cdot 1\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

■