**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1ª Prova** **1º Semestre** **2004**

**Data: Sexta-feira, 03 de Dezembro de 2004** **Duração: 09:40 - 11:20**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

***a)*** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x-1}$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ ***c)*** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ ***d)*** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3}{x+3}$;

**Problema 2** *Determine L para que a função*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}, & se\ x \neq 5 \\ L, & se\ x = 5 \end{cases}$$

*seja contínua em* $x = 5$.

**Problema 3** *Calcule os limites:*

***a)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{\text{sen } 4x}$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to 0} x\text{sen } \frac{1}{x}$;

**Problema 4** *Determine as constantes* $a, b$ *de modo que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} = \frac{1}{6}$$

**Problema 5** *Calcule os limites:*

***a)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x^3}$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2005**
**Data: Quarta-feira, 11 de Maio** **Turma C1**

---

**Exercício 1**

*a).* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x-1}$. *Observe que*

$$\frac{x^5-1}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1.$$

*Então*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1\\ &= 1+1+1+1+1\\ &= 5.\end{aligned}$$

□

*b). Observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x+1)}{(x-1)}\\ &= \tfrac{1+1+1}{-1-1}\\ &= \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

*c).*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}\\ &= \tfrac{-1}{4}.\end{aligned}$$

□

*d).*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3}{x+3} = \frac{6}{6} = 1$$

■

**Exercício 2** *Para que $f$ seja contínua em $x=5$, temos que mostrar que*

**i).** $f(5)$ *existe;*

**ii).** $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x)$*;*

**iii).** $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$

*Para provarmos o item (i), observe que, pela definição da função $f$ temos que $f(5)=L$, o que mostra que $f(5)$ existe.*
*Para a demonstração do item (ii), observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^{\pm}} f(x) &= \lim_{x\to 5^{\pm}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}\\ &= \lim_{x\to 5^{\pm}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}\,\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}\\ &= \lim_{x\to 5^{\pm}}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{10}\right)}{x-5}\\ &= \lim_{x\to 5^{\pm}}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{10}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}}\\ &= \lim_{x\to 5^{\pm}}\frac{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{10}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\\ &= \tfrac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

*E finalmente, do item (iii) segue-se que*

$$\lim_{x\to 5} f(x) = f(5) \Rightarrow \sqrt{2} = L.$$

*Ou seja, para que a função $f$ seja contínua em $x=5$, devemos ter $L=\sqrt{2}$.* ■

**Exercício 3**

**a).**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } 3x}{\text{sen } 4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } 3x}{\text{sen } 4x}\frac{4x}{4x}\frac{3x}{3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{\cos 3x\text{sen } 4x}\frac{4x}{4x}\frac{3x}{3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{3x}\frac{4x}{\text{sen } 4x}\frac{1}{\cos 3x}\frac{3}{4}\\ &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot \tfrac{3}{4}\\ &= \tfrac{3}{4}\end{aligned}$$

□

**b).**

$$\lim_{x\to 0} x\text{sen } \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

■

**Exercício 4** *Queremos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} = \frac{1}{6}$$

*Para isto, observe que* $b\sqrt{x+3}-a=0$ *para* $x=1$ *pois, caso contrário*

$$\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} = \pm\infty$$

*Assim,*

$$b\sqrt{1+3}-a=0 \Rightarrow 2b-a=0 \Rightarrow a=2b$$

*E o limite acima pode ser escrito como:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-2b}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1} b\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right)\end{aligned}$$

*tome* $y=\sqrt{x+3}$, *e observe que*

$$x = y^2-3$$

*e*

$$y\to 2 \text{ quando } x\to 1$$

*Logo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} b\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right) &= \lim_{y\to 2} b\left(\frac{y-2}{y^2-3-1}\right)\\ &= \lim_{y\to 2} b\left(\frac{y-2}{y^2-4}\right)\\ &= \lim_{y\to 2} b\frac{y-2}{(y+2)(y-2)}\\ &= \lim_{y\to 2}\frac{b}{(y+2)}\\ &= \tfrac{b}{4}\end{aligned}$$

*Então, para que*

$$\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1} = \frac{1}{6}$$

*Devemos ter*

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow b = \frac{2}{3} \text{ e } a = 2b = \frac{4}{3}$$

■

**Exercício 5**

**a).**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}\frac{\text{sen } x}{x}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= 1\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

□

**b).**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } x-\text{sen } x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}-\text{sen } x}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x-\cos x\text{sen } x}{x^3\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}\\ &= 1\cdot \tfrac{1}{2}\cdot 1\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2ª Prova** **1º Semestre** **2005**

**Data: Sexta-feira, 25 de Fevereiro** **Duração: 07:30 - 09:30**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada das seguintes funções:*
***a)*** $f(x) = \ln\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{1+\text{sen}\sqrt{x}}\right)$; ***b)*** $g(x) = \ln(\text{sen } 5x)$;

**Problema 2** *Suponha que $f$ é uma função que satisfaz a equação*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

*para todos os números reais $x$ e $y$. Suponha também que*

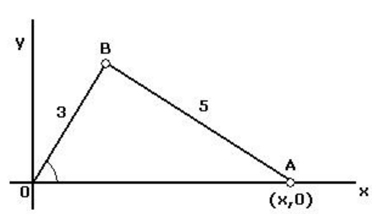
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

***a)*** *Calcule $f(0)$;* ***b)*** *Calcule $f'(0)$;* ***c)*** *Calcule $f'(x)$.*

**Problema 3** *A função $f(x) = \sec x$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ é inversível e sua inversa é a função $g(x) = arc\ sec\ x$, $x \ge 1$. Mostre que $g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.*

**Problema 4** *Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto $I$, com $1 \in I$. Suponha que $f(1) = 1$ e que, para todo $x \in I$, $f'(x) = x + [f(x)]^3$.*
***a)*** *Mostre que $f''(x)$ existe para todo $x \in I$.*
***b)*** *Calcule $f''(1)$;*
***c)*** *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1.*

**Problema 5** *Considere a figura abaixo. Suponha que os comprimentos dos segmentos $AB$ e $OB$ sejam, respectivamente, 5cm e 3cm. Suponha ainda, que $\theta$ esteja variando a uma taxa constante de $\frac{1}{2}rad/s$. Determine a velocidade de $A$, quando $\theta = \frac{\pi}{2}rad$.*




*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2005**
**Data: Quinta-feira, 12 de Maio** **Turma C1**

---

**Exercício 1**

*a).*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{1+\text{sen}\sqrt{x}}\right) \Rightarrow\\
f'(x) &= \frac{1}{\frac{\cos\sqrt{x}}{1+\text{sen}\ \sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{1+\text{sen}\ \sqrt{x}}\right)'\\
&= \frac{1+\text{sen}\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{-\frac{\text{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\left(1+\text{sen}\ \sqrt{x}\right)-\frac{\cos^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\text{sen}\ \sqrt{x}\right)^2}\\
&= \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\text{sen}\ \sqrt{x}+\text{sen}^2\sqrt{x}+\cos^2\sqrt{x}\right]}{1+\text{sen}\ \sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\text{sen}\ \sqrt{x}+1\right]}{1+\text{sen}\ \sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\
&= \frac{-1}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

□

*b).*

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \ln\left(\text{sen}\ 5x\right) \Rightarrow\\
g'(x) &= \frac{1}{\text{sen}\ 5x}\cdot\left(\text{sen}\ 5x\right)'\\
&= \frac{1}{\text{sen}\ 5x}5\cos 5x\\
&= 5\frac{\cos 5x}{\text{sen}\ 5x}\\
&= 5\cot\text{g}\ 5x
\end{aligned}
$$

■

**Exercício 2**

*a). Tome $x=y=0$ e observe que*

$$
\begin{aligned}
f(0) &= f(0)+f(0) \Rightarrow\\
f(0) &= 2f(0) \Rightarrow\\
f(0)-2f(0) &= 0 \Rightarrow\\
-f(0) &= 0 \Rightarrow\\
f(0) &= 0
\end{aligned}
$$

□

*b).*

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$$

□

*c).*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h}+x^2+xh\right]\\
&= 1+x^2
\end{aligned}
$$

■

**Exercício 3** *Queremos calcular a derivada da função*

$$g(x)=\text{arcsec}\,x$$

*Usando a regra da inversa, temos que*

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

*onde $f(x)=\sec x$ é a inversa de $g$; Calculando $f'$ temos:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sec x=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow\\
f'(x) &= \frac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x}=\frac{\text{sen}\ x}{\cos x}\frac{1}{\cos x}\\
&= \sec x\text{tg}\ x
\end{aligned}
$$

*Logo*

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{\sec\left(\text{arcsec}\,x\right)\text{tg}\left(\text{arcsec}\,x\right)}\\
&= \frac{1}{x\text{tg}\left(\text{arcsec}\,x\right)}
\end{aligned}
$$

*Usando que*

$$\text{tg}\ x=\sqrt{\sec^2 x-1},\forall x\in\mathbb{R}$$

*segue-se que:*

$$g'(x)=\frac{1}{x\sqrt{\sec^2\left(\text{arcsec}\,x\right)-1}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

■

**Exercício 4**

*a). Considere as funções*

$$p(x) = x \text{ e } q(x) = x^3$$

*Como $p$ e $q$ são deriváveis em $\mathbb{R}$ e $f$ é derivável em $I \subset \mathbb{R}$, podemos afirmar que*

*i). $q(f(x)) = [f(x)]^3$ é derivável em $I$;*

*ii). $p(x) + q(f(x) = x + [f(x)]^3$ é derivável em $I$;*

*Logo*

$$f'(x) = x + [f(x)]^3$$

*é derivável em $I \subset \mathbb{R}$.* □

*b).*

$$\begin{aligned} f''(x) &= [f'(x)]' \\ &= \left[x + [f(x)]^3\right]' \\ &= 1 + 3f(x)^2 f'(x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1) &= 1 + 3f(1)^2 f'(1) \\ &= 1 + 3\left[1 + f(1)^2\right] \\ &= 1 + 3 \cdot 2 \\ &= 7. \end{aligned}$$

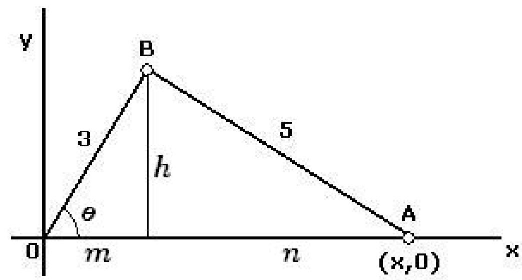
□

*c). A reta que passa por $(1, f(1)) = (1, 1)$ e tem coeficiente angular $m = f'(1) = 2$ é dada por*

$$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

■

**Exercício 5** *Considere a figura:*




*Temos que:*

$$\text{sen } \theta = \frac{h}{3} \quad \Rightarrow \quad h = 3 \text{ sen } \theta$$

$$\cos\theta = \frac{m}{3} \quad \Rightarrow \quad m = 3\cos\theta$$

$$h^2 + n^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{25 - 9 \text{ sen}^2 \theta}$$

$$x = m + n \quad \Rightarrow \quad x(\theta) = 3\cos\theta + \sqrt{25 - 9 \text{ sen}^2 \theta}$$

*Logo*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= \left(-3 \text{ sen } \theta - \frac{\theta \text{sen } \theta \cos\theta}{\sqrt{25 - 9 \text{ sen}^2 \theta}}\right)\frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

*e quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$, teremos*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-3}{2} cm/s$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**3ª Prova** **1º Semestre** **2005**

**Data: Terça-feira, 19 de Abril** **Duração: 09:30 - 11:30**

---

**Problema 1** *Considere a função* $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.
***a)*** *Faça o estudo de crescimento e decrescimento de* $f$*;*
***b)*** *Faça o estudo de concavidade de* $f$*;*
***c)*** *Calcule os pontos de máximo, mínimo e inflexão de* $f$ *e classifique-os como locais ou globais;*
***d)*** *Calcule as assíntotas de* $f$*;*
***e)*** *Faça o gráfico de* $f$*;*

**Problema 2** *Calcule os limites:*
***a)*** $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}}$*;*
***b)*** $\lim_{x\to 0^-} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$*;*
***c)*** $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x$*;*
***d)*** $\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$*;*

**Problema 3** *Considere a curva* $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$. *Determine a tangente à curva tal que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados, seja mínima.*

**Problema 4** *Calcule as integrais:*
*a)* $\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx$*;*
*b)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x dx$*;*
*c)* $\int_0^2 2^x dx$*;*
*d)* $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$*;*

**Problema 5** *Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo* $y$, *do conjunto de todos os pares* $(x, y)$ *tais que* $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \frac{x^2}{2} + 1$ *e* $y \geq x^2 - 1$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 3$^{a}$ Prova** **2005**
**Data: Quinta-feira, 12 de Maio** **Turma C1**

---

**Exercício 1** *Temos que* $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. *Então,*

*a).*

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

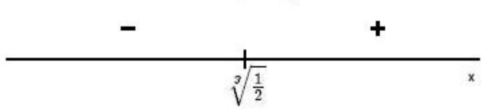
*Considere a função*

$$g(x) = 2x^3 - 1,$$

*como* $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *segue-se que, o estudo de sinal de* $f'$ *é completamente determinado pelo estudo de sinal da função* $g$. *Ou seja,*

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

*donde:*




*ou seja:*

$$f \text{ é crescente para } x > \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

$$f \text{ é decrescente para } x < \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

$\square$

*b).*

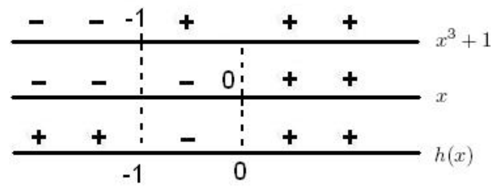
$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^2}\frac{x^3 + 1}{x}$$

*Considere a função*

$$h(x) = \frac{x^3 + 1}{x},$$

*como* $\frac{2}{x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *segue-se que, o estudo de sinal de* $f''$ *é completamente determinado pelo estudo de sinal da função* $h$. *Então:*

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$




*Assim,* $f$ *possui concavidade para cima em*

$$(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

*e concavidade para baixo em* $(-1, 0)$ $\square$

*c).*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

*isto é,* $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ *é o único ponto crítico de* $f$.

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 2 + \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3} = 2 + 4 = 6 > 0$$

*o que implica dizer, que* $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ *é ponto de mínimo da função* $f$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 + \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -1$$

*logo,* $x = -1$ *é ponto de inflexão da função* $f$.$\square$

*d). Observe que*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + \tfrac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + \tfrac{1}{x} = -\infty$$

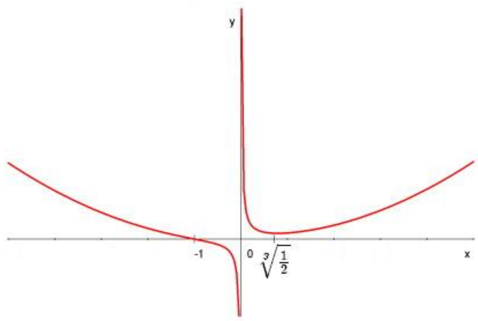
*Portanto,* $x = 0$ *é uma assíntota vertical de* $f$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 + \tfrac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^2 + \tfrac{1}{x} = +\infty$$

*Portanto,* $f$ *não possui assíntota horizontal.* $\square$

*e). Esboçando o gráfico da função $f$ temos*




■

**Exercício 2**

*a).*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^2+1\right)\dfrac{1}{\ln x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+1\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{2x^2}{x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{4x}{2x}}\\ &= e^2\end{aligned}$$

□

*b).*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to0^-} e^{\ln(1-\cos x)\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

□

*c).*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\operatorname{sen} x\ln x &= \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

*d).*

$$\lim_{x\to0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

■

**Exercício 3** *A equação da reta tangente ao gráfico de $f$, que passa pelo ponto $P=(a,f(a))=(a,1-a^2)$ e possui coeficiente angular $m=f'(a)=-2a$ é dada por*

$$y-\left(1-a^2\right) = -2a\,(x-a) \Rightarrow y = -2ax+a^2+1$$

*Calculando a interseção desta reta com os eixos coordenados encontramos os pontos:*

$$A = \left(\frac{a^2+1}{2a},0\right)\ e\ B=(0,a^2+1).$$

*Desta forma, a área $A$ do triângulo $\Delta OAB$ é dado por*

$$A(a) = \frac{\frac{a^2+1}{2a}a^2+1}{2} = \frac{\left(a^2+1\right)^2}{4a}$$

*Para determinarmos seu máximo, basta derivar e igualar a zero, ou seja:*

$$\begin{aligned}A'(a)=0 \quad &\Rightarrow \frac{16a^2(a^2+1)-4\left(a^2+1\right)^2}{16a^2}=0\\ &\Rightarrow 16a^2(a^2+1) = 4\left(a^2+1\right)^2\\ &\Rightarrow 4a^2 = a^2+1\\ &\Rightarrow 3a^2 = 1\\ &\Rightarrow a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\end{aligned}$$

*Como $0 \leq a \leq 1$, segue-se que $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e a equação da reta tangente que estamos procurando é dada por:*

$$y = -2ax + a^2 + 1 \Rightarrow y = -2\sqrt{\frac{1}{3}}x + \frac{4}{3}$$

$\blacksquare$

**Exercício 4**

*a).* $\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx$, *tome* $y = x^2 + 3$ *e observe que*

$$dy = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dy}{2}$$

$$y = 3 \text{ quando } x = 0$$

$$y = 4 \text{ quando } x = 1$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx &= \tfrac{1}{2}\int_3^4 \sqrt{y}dy \\ &= \tfrac{1}{3}\sqrt{y^3}\Big|_3^4 \\ &= \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{3^3}\right) \\ &= \tfrac{8}{3} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$\square$

*b).* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2 x dx$. *Inicialmente lembre-se que*

$$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

*e portanto, segue-se que*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(x - \frac{\mathrm{sen}\ 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$\square$

*c).*

$$\int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = \frac{4-1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}$$

$\square$

*d).* $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$ *tome* $y = 1 + x^2$ *e observe que*

$$dy = 2xdx$$

$$y = 1 \text{ quando } x = 0$$

$$y = 2 \text{ quando } x = 1$$

*Portanto*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx &= \int_1^2 \frac{1}{y}dy \\ &= \ln y|_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 5**

$$\begin{aligned}V_1 &= 2\pi\int_0^2 x(\tfrac{x^2}{2} + 1)dx = 8\pi \\ V_2 &= 2\pi\int_1^2 x(x^2-1)dx = \tfrac{9\pi}{2} \\ V &= V_2 - V_1 \\ &= 8\pi - \frac{9\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**Prova Final** **1$^{o}$ Semestre** **2005**

**Data: Quarta-feira, 27 de Abril** **Duração: 09:00 - 11:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

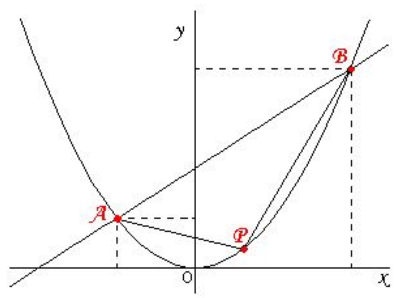
***a)*** $\lim_{x \to p} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x - p}$, *onde* $p$ *é uma constante real;*

***b)*** $\lim_{x \to +\infty} \left( \dfrac{x+2}{x+1} \right)^{x}$;

**Problema 2** *Determine* $f'$ *e* $f''$ *para*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & se\ x \leq 1 \\ 5x - 1, & se\ x > 1 \end{cases}$$

**Problema 3** *A reta* $y = x+2$ *intercepta a parábola* $y = x^2$ *nos pontos* $A$ *e* $B$ *(veja a figura!). Encontre o ponto* $P$ *sobre o arco* $AOB$ *da parábola que maximize a área do triângulo* $PAB$.




**Problema 4** *Calcule as integrais abaixo:*

*a)* $\int \frac{\operatorname{sen}\, x}{\cos^3 x} dx$;

*b)* $\int x \ln x dx$.

**Problema 5** *Calcule a área da região* $R$ *delimitada pelo gráfico das funções* $f(x) = x\,|x|$ *e* $g(x) = x^3$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2005**
**Data: Quinta-feira, 11 de Maio** **Turma C1**

---

**Exercício 1**

*a).*

$$\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p} = \lim_{x\to p}\frac{\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}\right)'}{(x-p)'}$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{1}$$

$$= \frac{1}{n}p^{\frac{1}{n}-1}$$

$\square$

*b).*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$$

*assim, tomando-se*

$$y = x+1$$

*segue-se que*

$$x = y-1$$

*e* $y\to+\infty$ *quando* $x\to+\infty$. *Portanto, temos que*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\tfrac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y-1}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{y}\right)^y\left(1+\tfrac{1}{y}\right)^{-1}$$

$$= e\cdot 1$$

$$= e$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Sabe-se que*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x, & se\ x\le 1\\ 5x-1, & se\ x>1\end{cases}$$

*Assim temos que,*

- *para* $x>1 \Rightarrow f(x)=5x-1 \Rightarrow f'(x)=5$.
- *para* $x<1 \Rightarrow f(x)=x^2+3x \Rightarrow f'(x)=2x+3$.
- *para* $x=1 \Rightarrow f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
  - *para* $h\to0^+ \Rightarrow 1+h>1$, *logo*
  $$f'(1)=\lim_{h\to0^+}\frac{5h+5-1-4}{h}=5$$
  - *para* $h\to0^- \Rightarrow 1+h<1$, *logo*
  $$f'(1) = \lim_{h\to0^-}\frac{h^2+5h+4-4}{h} = \lim_{h\to0^-}h+5 = 5$$

*Calculando* $f''$:

- *para* $x>1 \Rightarrow f'(x)=5 \Rightarrow f''(x)=5$.
- *para* $x<1 \Rightarrow f'(x)=2x+3. \Rightarrow f''(x)=2$.
- *para* $x=1 \Rightarrow f''(1)=\lim_{h\to0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$
  - *para* $h\to0^+ \Rightarrow 1+h>1$, *logo*
  $$f''(1)=\lim_{h\to0^+}\frac{5-5}{h}=0$$
  - *para* $h\to0^- \Rightarrow 1+h<1$, *logo*
  $$f''(1)=\lim_{h\to0^-}\frac{2h+5-5}{h}=2$$
  - *Logo* $f''(1)=\nexists$.

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Calculando $A$ e $B$:*

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -1$$

*Logo $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 4)$.*
*Como $P$ está sobre a parábola $y = x^2$ segue-se que $P = (a, a^2), a \in \mathbb{R}$. Assim*

$$A(x) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-3a^2 + 3a + 6\right)$$

*Então*

$$A'(x) = \tfrac{1}{2}(-6a + 3)$$

$$A''(x) = \tfrac{1}{2}(-6) = -3$$

*Ou seja:*

$$A'(a) = 0 \Rightarrow 3 - 6a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$A''(\frac{1}{2}) = -3 < 0$$

*Portanto, $P = (a, a^2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é o ponto que maximiza a área do triângulo $\Delta BAP$.* ■

**Exercício 4**

a). $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x}dx$, *tome*

$$y = \cos x$$

*e observe que*

$$dy = -\text{sen } xdx$$

*Portanto:*

$$\begin{aligned}\int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x}dx &= \int \frac{-dy}{y^3} \\ &= \int -y^{-3}dy \\ &= \frac{-y^{-2}}{-2} + k \\ &= \frac{1}{2y^2} + k. \\ &= \frac{1}{2\cos^2 x} + k \\ &= \tfrac{1}{2}\sec^2 x + k\end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* □

b). $\displaystyle\int x \ln x dx$; *usando integração por partes, tome:*

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

*Então:*

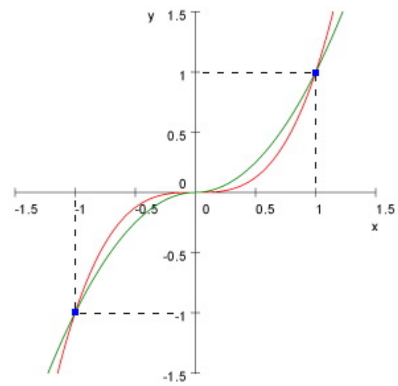
$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \tfrac{x^2}{2}\ln x - \int \tfrac{x^2}{2}\tfrac{1}{x}dx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{1}{2}\int xdx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + k \\ &= \tfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right) + k\end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* ■

**Exercício 5**

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x^2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^3$$




*Pelo gráfico acima, podemos ver que a área $A$ que estamos procurando é dada por:*

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|\,dx \\ &= 2\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \\ &= 2\int_0^1 \left|x^2 - x^3\right| dx \\ &= 2\left|\int_0^1 x^2 - x^3 dx\right| \\ &= 2\left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\ &= 2(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) \\ &= \tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1ª Prova** **1º Semestre** **2007**

**Data: Quarta-feira, 04 de Abril de 2007** **Duração: 08:00 - 10:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$.

**Problema 2** *Calcule os limites:*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+9}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$.

**Problema 3** *Determine $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a função*

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2, & se\ x \leq 1 \\ x^2+bx+c, & se\ 1 < x < 4 \\ 5x-15, & se\ x \geq 4 \end{cases}$$

*seja contínua em $\mathbb{R}$.*

**Problema 4** *Calcule os limites:*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{tg}\, x}{x+\operatorname{tg}\, x}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen}\, x}{x^2-\operatorname{sen}\, x}$.

**Problema 5** *Calcule os limites:*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right]$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+2x)^x$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2007**
**Data: Segunda, 30 de Abril** **Prof$^o$. Edson**

---

**Exercício 1**

*a). tome*

$$u = \sqrt[3]{x}$$

*e observe que*

$$x = u^3$$

$$x \to 3 \Rightarrow u \to \sqrt[3]{3} com$$

*com isto, teremos que*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x-3} = \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{u - \sqrt[3]{3}}{u^3 - 3}$$

*Usando a divisão de polinômios, temos que*

$$u^3 - 3 = (u - \sqrt[3]{3})\left(u^2 + \sqrt[3]{3}u + \sqrt[3]{9}\right)$$

*Donde segue-se que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x-3} &= \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{u - \sqrt[3]{3}}{u^3 - 3} \\
&= \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{u - \sqrt[3]{3}}{(u - \sqrt[3]{3})\left(u^2 + \sqrt[3]{3}u + \sqrt[3]{9}\right)} \\
&= \lim_{u\to \sqrt[3]{3}} \frac{1}{u^2 + \sqrt[3]{3}u + \sqrt[3]{9}} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9}
\end{aligned}$$

□

*b).*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

■

**Exercício 2**

*a).*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+9} = \frac{3^2-9}{3^2+9} = \frac{0}{18} = 0$$

□

*b).*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2x}\frac{1}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{2x\,(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

■

**Exercício 3** *Observe que:*

- *Se* $x < 1 \Rightarrow f(x) = -2x-2$, *ou seja, se* $x < 1$ *a função* $f$ *é polinomial e portanto, contínua em* $(-\infty, 1)$.
- *Se* $1 < x < 4 \Rightarrow f(x) = x^2 + bx + c$, *ou seja, se* $1 < x < 4$ *a função* $f$ *é polinomial e portanto contínua em* $(1, 4)$.
- *Se* $x > 4 \Rightarrow f(x) = 5x - 15$, *ou seja, se* $x > 4$ *a função* $f$ *é polinomial e portanto contínua em* $(4, +\infty)$.

*Desta forma temos que a função* $f$, *da forma como está definida, sem sabermos os valores de* $b$ *ou* $c$, *já é contínua em* $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$, *o que nos leva a concluir que, para a função* $f$ *ser contínua em* *todo o conjunto* $\mathbb{R}$ *resta apenas, que seja continua em* $x = 1$ *e* $x = 4$.

*Para que* $f$ *seja continua em* $x = 1$ *devemos ter que*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*ou seja*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad &\Leftrightarrow \\ \lim_{x\to 1} x^2 + bx + c = -4 \quad &\Leftrightarrow \\ 1 + b + c = -4 \quad &\Leftrightarrow \\ b + c = -5 \end{aligned} \tag{1}$$

*Para que* $f$ *seja continua em* $x = 4$ *devemos ter que*

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

*ou seja*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) \quad &\Leftrightarrow \\ \lim_{x\to 4} x^2 + bx + c = 5 \quad &\Leftrightarrow \\ 16 + 4b + c = 5 \quad &\Leftrightarrow \\ 4b + c = -11 \end{aligned} \tag{2}$$

*Resolvendo o sistema formado pelas equações* (1) *e* (2) *teremos*

$$c = -3$$

$$b = -2$$

■

**Exercício 4**

*a).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x - \text{tg } x}{x + \text{tg } x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}{x + \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}{x + \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{\text{sen } x}{x}\dfrac{1}{\cos x}}{1 + \dfrac{\text{sen } x}{x}\dfrac{1}{\cos x}} \\ &= \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

□

*b).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x + \text{sen } x}{x^2 - \text{sen } x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + \text{sen } x}{x^2 - \text{sen } x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \dfrac{\text{sen } x}{x}}{x - \dfrac{\text{sen } x}{x}} \\ &= \frac{1+1}{0-1} = -2 \end{aligned}$$

■

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} &= \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} &= \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1-(x+3)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} &= \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} &= 0 \end{aligned}$$

□

*b).*

$$\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^x = (1 + 0)^0 = 1^0 = 1$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2ª Prova** | **1º Semestre** | **2007**

**Data: Quarta-feira, 09 de Maio de 2007** | **Duração: 08:00 - 10:00**

---

**Problema 1** *Determine a derivada das seguintes funções*

*a).* $f(x) = (x^2 + 3x)^2$;

*b).* $f(x) = \cos(e^x)$.

**Problema 2** *Seja* $r$ *a reta tangente ao gráfico de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *no ponto de abcissa* $p$. *Mostre que* $r$ *intercepta o eixo* $x$ *no ponto de abcissa* $2p$.

**Problema 3** *Determine a reta que é tangente ao gráfico de* $f(x) = x^2$ *e paralela à reta* $y = 4x + 2$.

**Problema 4** *Seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diferenciável tal que* $g(1) = 2$ *e* $g'(1) = 3$. *Calcule* $f'(0)$, *senda* $f$ *dada por* $f(x) = e^x g(3x + 1)$.

**Problema 5** *Uma escada de 8m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo, no instante em que a inferior estiver a 3m da parede?*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2007**
**Data: Quarta-feira, 09 de Maio** **Prof$^o$. Edson**

---

**Exercício 1**

*a). Sendo* $f(x) = \left(x^2+3x\right)^2$ *temos que*

$$f'(x) = 2(x^2+3x)(2x+3) = 4x^3+18x^2+18x$$

□

*b). Sendo* $f(x) = \cos(e^x)$ *temos que*

$$f'(x) = -\text{sen}(e^x)e^x = -e^x\text{sen}(e^x)$$

■

**Exercício 2** *Sendo* $f(x) = \frac{1}{x}$ *segue-se que*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

*e portanto*

$$f'(p) = -\frac{1}{p^2}$$

*Logo, a reta que passa pelo ponto* $(p, \frac{1}{p})$ *e possui coeficiente angular* $-\frac{1}{p^2}$ *é dada por*

$$y - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}\left(x - \frac{1}{p}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{p^2} + \frac{2}{p}$$

*Calculando a intersecção com o eixo x, obtemos*

$$0 = -\tfrac{x}{p^2} + \tfrac{2}{p} \quad \Rightarrow$$

$$\tfrac{x}{p^2} = \tfrac{2}{p} \quad \Rightarrow$$

$$x = 2p$$

■

**Exercício 3** *Seja* $p \in D_f$. *O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $f$ *em* $(p, f(p))$ *é dado por* $m = f'(p) = 2p$. *Assim, para que esta reta seja paralela à reta* $y = 4x+2$, *devemos ter*

$$m = 4 \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

*e a reta procurada é dada por*

$$y - f(p) = m(x-p) \quad \Leftrightarrow$$

$$y - 4 = 4(x-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$y = 4x - 4$$

■

**Exercício 4** *Sendo* $g(1) = 2, g'(1) = 3$ *e* $f(x) = e^x g(3x+1)$ *teremos*

$$f'(x) = e^x g(3x+1) + 3e^x g'(3x+1)$$

*Logo,*

$$f'(0) = e^0 g(1) + 3e^0 g'(1)$$

*Ou seja,*

$$f'(0) = 2 + 3\cdot 3 = 11$$

■

**Exercício 5** *Se considerarmos x sendo a distância da extremidade inferior da escada à parede e y a distância da extremidade superior ao chão e, observando além disto que, a escada forma com o chão e a parede, um triângulo retângulo de catetos x e y e hipotenusa 8m, segues que*

$$x^2 + y^2 = 64$$

*ou seja,*

$$y = \sqrt{64 - x^2}$$

*Usando a regra da cadeia, temos que*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\sqrt{64-x^2}}\frac{dx}{dt}$$

*e quando* $x = 3m$ *e* $\frac{dx}{dt} = 2m/s$, *teremos*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-6}{\sqrt{55}}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**3$^{a}$ Prova** **1$^{o}$ Semestre** **2007**

**Data: Quarta-feira, 13 de Junho de 2007** **Duração: 08:00 - 10:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

*a).* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg } \pi x}{\ln(1+x)}$;

*b).* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+x}$.

**Problema 2** *Determine o ponto da parábola* $y = 1 - x^2$ *no qual a reta tangente forma com os eixos coordenados, no primeiro quadrante, o triângulo de menor área.*

**Problema 3** *Determine o intervalo* $[a, b]$ *para o qual o valor da integral* $\displaystyle\int_a^b (2 + x - x^2)dx$ *é máximo.*

**Problema 4** *Calcule as integrais*

*a).* $\displaystyle\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

*b.)* $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\text{sen } x|\, dx$

**Problema 5** *Se* $x\text{sen } \pi x = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt$, *onde* $f$ *é uma função contínua, calcule* $f(4)$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2007**
**Data: Quarta-feira, 13 de Junho** **Prof$^o$. Edson**

---

**Exercício 1**

*a). Observe que*

$$\mathrm{tg}\pi x \to 0 \textit{ quando } x \to 0$$

*e*

$$\ln(1+x) \to 0 \textit{ quando } x \to 0$$

*Assim, usando a Regral de L'Hospital, temos*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\pi x}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\pi \sec^2 \pi x}{\frac{1}{1+x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \pi \sec^2 \pi x (1+x) \\ &= \pi\end{aligned}$$

□

*b). Observe que*

$$1-\cos x \to 0 \textit{ quando } x \to 0$$

*e*

$$x^2 + x \to 0 \textit{ quando } x \to 0$$

*Assim, usando a Regral de L'Hospital, temos*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\ x}{2x+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *A reta tangente ao gráfico da parábola $y = 1 - x^2$ no ponto $Q = (p, 1-p^2)$ tem coeficiente angular $m = -2p$ e seu equação é dada por*

$$y - (1-p^2) = -2p(x-p)$$

*ou seja*

$$y = -2px + p^2 + 1$$

*A interseção desta reta com o eixo $x$ é o ponto $M = (x_0, 0)$,onde*

$$0 = -2px_0 + p^2 + 1 \Rightarrow x_0 = \frac{p^2+1}{2p}$$

*ou seja, $M = (\frac{p^2+1}{2p}, 0)$. De modo análogo, a interseção com o eixo $y$ é o ponto $N = (0, y_0)$, onde*

$$y_0 = p^2 + 1,$$

*ou seja, $N = (0, p^2+1)$. Assim, o triângulo de vértices $O, M$ e $N$, onde $O$ é a origem do plano, possui área*

$$A(p) = \frac{(p^2+1)^2}{4p}$$

*Para encontrarmos o $p$ tal que $A(p)$ sejá mínimo devemos resolver a equação*

$$A'(p) = 0$$

*então, resolvendo teremos*

$$\begin{aligned}\frac{16p^2(p^2+1) - 4(p^2+1)^2}{16p^2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ 16p^2(p^2+1) - 4(p^2+1)^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ 16p^2(p^2+1) = 4(p^2+1)^2 \quad &\Leftrightarrow \\ 16p^2 = 4(p^2+1) \quad &\Leftrightarrow \\ 4p^2 = p^2 + 1 \quad &\Leftrightarrow \\ 3p^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \\ p = \tfrac{\sqrt{3}}{3} &\end{aligned}$$

*Então, o ponto da parábola que é cadidato a minimizar a área do triângulo em questão é*

$$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

*Observe que*

$$A''(p) = \frac{3p^4+1}{2p^3}$$

*e*

$$A''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$$

*Logo, $Q$ é um ponto de mínimo.* ■

**Exercício 3** *Observe que a parábola* $y = 2 + x - x^2$ *possui raízes* $x_1 = -1$ *e* $x_2 = 2$ *e sua concavidade é voltada para baixo. Logo,*

$$\int_a^b (2 + x - x^2)dx \leq 0 \text{ se } [a, b] \subset (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

*e*

$$\int_a^b (2 + x - x^2)dx \geq 0 \text{ se } [a, b] \subset [-1, 2]$$

*Assim, a integral terá valor máximo se* $a = -1$ *e* $b = 2$. ■

**Exercício 4**

*a).*

$$\begin{aligned}\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}\Big|_4^9 \\ &= (18 + 6) - (\frac{16}{3} + 4) \\ &= \frac{44}{3}\end{aligned}$$

□

*b). Observe que, para* $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, *vale*

$$|\text{sen } x| = \begin{cases} \text{sen } x, & se\ 0 \leq x \leq \pi \\ -\text{sen } x, & se\ \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

*Então,*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\text{sen } x|\, dx &= \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\text{sen } x|\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen } x dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\text{sen } x) dx \\ &= -\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= +1 + 1 + 0 + 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Seja* $F$ *uma primitiva da função* $f$, *ou seja*

$$F'(t) = f(t),\ t \in [0, x^2]$$

*Então,*

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(0)$$

*Mas, por outro lado*

$$x\text{sen } \pi x = \int_0^{x^2} f(t)dt$$

*Assim, temos que*

$$x\text{sen } \pi x = F(x^2) - F(0)$$

*Derivando esta expressão com relação em ambos os lados temos*

$$\text{sen } \pi x + \pi x \cos \pi x = 2xF'(x^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{sen } \pi x + \pi x \cos \pi x = 2xf(x^2)$$

*Quando* $x = 2$, *temos*

$$\text{sen } 2\pi + 2\pi \cos 2\pi = 4f(4) \Rightarrow f(4) = \frac{\pi}{2}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**Prova Final** **1$^{\text{o}}$ Semestre** **2007**

**Data: Segunda-feira, 02 de Julho de 2007** **Duração: 08:00 - 10:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

*a).* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\operatorname{sen}\, x}\right)$*;*

*b).* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$.

**Problema 2** *Determine* $L$ *para que a função*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, & \text{se } x\neq 3\\ L, & \text{se } x=3\end{cases}$$

*seja contínua em* $x=3$.

**Problema 3** *Calcule a derivada das funções:*

*a).* $f(x)=2^x$*;*

*b).* $f(x)=\frac{\ln\, x}{x}$.

**Problema 4** *Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de* $1m^3$ *de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa R\$ 10 o metro quadrado e na tampa, material de R\$ 20 o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimizam o custo do material empregado.*

**Problema 5** *Calcule as integrais:*

*a).* $\int \frac{x^2+1}{x}dx$*;*

*b).* $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2007**
**Data: Segunda-feira, 09 de Julho** **Prof$^o$. Edson**

---

**Exercício 1**

*a).*
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x - x^2}{x\text{sen } x}$$

*Observe que*
$$\text{sen } x - x^2 \to 0 \textit{ quando } x\to 0$$

*e*
$$x\text{sen } x \to 0 \textit{ quando } x\to 0$$

*Assim, usando a Regra de L'Hospital, temos*
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x - x^2}{x\text{sen } x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 2x}{\text{sen } x + x\cos x}\end{aligned}$$

*Agora, observe que*
$$x\to 0^+ \Rightarrow \text{sen } x + x\cos x \to 0^+$$

*e*
$$x\to 0^- \Rightarrow \text{sen } x + x\cos x \to 0^-$$

*Portanto*
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=+\infty$$

*e*
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=-\infty$$

*Logo,*
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen } x}\right)=\nexists$$

□

*b). Observe que*
$$\sqrt[3]{x+2}-1\to 0 \textit{ quando } x\to -1$$

*e*
$$x+1\to 0 \textit{ quando } x\to -1$$

*Assim, usando a Regra de L'Hospital, temos*
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}\\ &= \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Para que a função $f$ seja contínua em $x=3$, devemos ter*
$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

*ou seja*
$$\lim_{x\to 3} f(x) = L$$

*Desta forma temos que*
$$\begin{aligned}L=\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3} f(x)\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

■

**Exercício 3**

*a). Considerando $f(x)=2^x$ temos que*
$$f'(x)=2^x[x\ln 2]'=2^x\ln 2$$

□

*b). Considerando $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, segue-se que*
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

■

**Exercício 4** *Suponha que o cilindro em questão tenha raio $r$ e altura $h$. Assim, se considerarmos $A_l, A_f$ e $A_t$ sendo as áreas laterail, do fundo e da tampa do cilindro, respectivamente, teremos que*

$$A_l = 2\pi rh$$
$$A_f = \pi r^2$$
$$A_t = \pi r^2$$

*e com isto, dado que o preço do material usado na lateral e no fundo do cilindro é de R\$ 10 por metro quadrado e R\$20 por metro quadrado para o material usado na tampa, segue-se que o custo para a construção de um cilidro é de:*

$$\begin{aligned} C &= 10(2\pi rh + \pi r^2) + 20\pi r^2 \\ &= 20\pi rh + 30\pi r^2 \end{aligned}$$

*Mas, como o volume do cilidro deve ter $1m^3$, então*

$$\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

*ou seja*

$$C(r) = \frac{20}{r} + 30\pi r^2$$

*Observe que*

$$C'(r) = -\tfrac{20}{r^2} + 60\pi r$$

$$C''(r) = \tfrac{40}{r^3} + 60\pi$$

*Determinando os candidatos a extemos,*

$$C'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}$$

*Classificando,*

$$C''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}\right) = 180\pi > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}} \text{ é mínimo}$$

*Assim, as dimensões do cilindro que minimizam o custo de sua confecção são $r = \sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}$ e $h = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$.* ■

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned} \int \tfrac{x^2+1}{x} dx &= \int \left(\tfrac{x^2}{x} + \tfrac{1}{x}\right) dx \\ &= \int \left(x + \tfrac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln\ |x| + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

*b).*

$$\begin{aligned} \int \tfrac{e^x+e^{-x}}{2} dx &= \tfrac{1}{2}\int (e^x + e^{-x})\, dx \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1ª Prova** **2º Semestre** **2007**

**Data: Segunda-feira, 10 de Setembro de 2007** **Duração: 15:00 - 17:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

*a).* $\lim_{x \to -2^+} \ln(x+2)$;

*b).* $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{8x - 5x^2 + x^3 - 4}$.

**Problema 2** *Seja* $f$ *uma função tal que* $|f(x)| \leq x^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Prove que* $f$ *é contínua em* $x = 0$.

**Problema 3** *Calcule os limites:*

*a).* $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos\, h - 1}{h}$;

*b).* $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{10} + h) - \cos\frac{\pi}{10}}{h}$.

**Problema 4** *Seja* $f$ *uma função tal que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

*Calcule* $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(7x)}{3x}$.

**Problema 5** *Calcule os limites:*

*a).* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$;

*b).* $\lim_{x \to +\infty} \left( \dfrac{x+2}{x+1} \right)^x$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 1$^{a}$ Prova** **2007**
**Data: Segunda-feira, 10 de Setembro** **Prof$^{o}$. Edson**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$x \to -2^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x+2 \to 0^+$$

*Logo*

$$\lim_{x \to -2^+} \ln(x+2) = -\infty$$

□

**b).** *Observe que*

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)(x^2 - x - 2)$$

*e*

$$8x - 5x^2 + x^3 - 4 = (x-2)(x^2 - 3x + 2)$$

*Assim,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \tfrac{x^3-3x^2+4}{8x-5x^2+x^3-4} &= \lim_{x \to 2} \tfrac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x^2-3x+2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \tfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} \end{aligned}$$

*Observe novamente que*

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

*e*

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{8x - 5x^2 + x^3 - 4} &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Para mostrar que a função $f$ é contínua em $x = 1$ precisamos mostrar que*

**i.** *$f(0)$ existe;*

**ii.** *$\lim_{x \to 0} f(x)$ existe;*

**iii.** *$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.*

*Para provar o item (i), observe que*

$$|f(x)| \leq x^2$$

*para qualquer $x \in \mathbb{R}$, logo esta expressão também será verdadeira para $x = 0$ o que que no dá a seguinte expressão*

$$|f(0)| \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(0) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

*Portanto, $f(0)$ existe e é igual a zero.*

*Além disto temos que*

$$|f(x)| \leq x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

*Observe agora que*

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$
$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

*logo, pelo teorema do confronto segue-se que*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

*ou seja,*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(0)$$

*o que prova os itens (ii) e (iii) e conseqüentemente prova que a função $f$ é contínua em $x = 0$.* ■

**Exercício 3**

**a).**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\cdot\frac{\cos h+1}{\cos h+1}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\text{sen}^2 h}{h(\cos h+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\text{sen }h}{h}\cdot\frac{\text{sen }h}{\cos h+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

**b).** *Considere*

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{10}+h\right)-\cos\frac{\pi}{10}}{h}$$

*Temos que*

$$\begin{aligned}A &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{10}\cos h-\text{sen }\frac{\pi}{10}\text{sen }h-\cos\frac{\pi}{10}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\cos\tfrac{\pi}{10}\tfrac{(\cos h-1)}{h}-\text{sen }\tfrac{\pi}{10}\tfrac{\text{sen }h}{h}\right]\\ &= -\text{sen }\tfrac{\pi}{10}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 4** *Por hipótese temos que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

*Então*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(7x)}{3x} &= \lim_{x\to 0}\frac{7f(7x)}{3\cdot 7x}\\ &= \lim_{x\to 0}\tfrac{7}{3}\frac{f(7x)}{7x}\\ &= \tfrac{7}{3}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\frac{1}{x^2}\left(x^2+3\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}}{1+\frac{3}{x^2}}\\ &= \tfrac{0}{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

*b).*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)^x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x\end{aligned}$$

*Tome $y=x+1$ e observe que*

$$x\to+\infty\Rightarrow y\to+\infty$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\\ &= e\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2ª Prova** **2º Semestre** **2007**

**Data: Segunda-feira, 22 de Outubro de 2007** **Duração: 15:00 - 17:00**

---

**Problema 1** *Dado que* $f(3) = -1$ *e* $f'(3) = 5$*, encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *no ponto onde* $x = 3$.

**Problema 2** *Mostre que* $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ *é contínua em* $x = 2$ *mas não é diferenciável em* $x = 2$.

**Problema 3** *Encontre* $g'(3)$ *dado que* $f(3) = -2$ *e* $f'(3) = 4$ *para*

**a).** $g(x) = 3x^2 - 5f(x)$;

**b).** $g(x) = \dfrac{2x+1}{f(x)}$.

**Problema 4** *Uma escada de* $1,3m$ *está apoiada em uma parede. Se seu topo desliza sobre a parede para baixo a uma taxa de* $0,2m/s$*, com que rapidez a base da escada estará se afastando da parede quando o topo estiver* $0,5m$ *acima do chão?*

**Problema 5** *Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de* $x + y + xy = 3$ *no ponto* $(1, 1)$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2007**
**Data: Terça-feira, 23 de Outubro** **Turma A1**

---

**Exercício 1** *Como $f(3) = -1$ e $f'(3) = 5$ segue-se que a reta procurada passa pelo ponto $(3, -1)$ e tem coeficiente angular $m = 5$. Portanto a equação desta reta é dada por*

$$y + 1 = 5(x - 3) \Leftrightarrow y = 5x - 16$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Observe que*

**i.** $f(2) = 0$, *portanto* $f(2)$ *existe;*

**ii.** $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{(x-2)^2} = 0$;

**iii.** $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

*Assim, segue-se de (i),(ii), (iii) e da definição de continuidade de uma função num ponto, que $f$ é contínua em $x = 2$.*
*Por outro lado, observe que*

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

*donde, podemos-se ver que $f'$ existe para qualquer $x \neq 2$, ou seja $f$ não é diferenciável em $x = 2$.* $\blacksquare$

**Exercício 3**

**a).** *Dado que $g(x) = 3x^2 - 5f(x)$, segue-se que*

$$g'(x) = 6x - 5f'(x)$$

*Logo*

$$g'(3) = 18 - 20 = -2$$

$\square$

**b).** *Dado que $g(x) = \dfrac{2x+1}{f(x)}$, segue-se que*

$$g'(x) = \frac{2f(x) - (2x+1)f'(x)}{[f(x)]^2}$$

*Logo*

$$g'(3) = \frac{2 \times (-2) - 7 \times 4}{4} = -8$$

$\blacksquare$

**Exercício 4** *Pelo que é dado no problema, se chamarmos de $x$ a distância da base da escada à parede e de $y$ a altura do topo da escada em relação ao chão, usando o teorema de Pitágoras, teremos que*

$$x^2 + y^2 = (1,3)^2 \qquad (1)$$

*e quando $y = 0,5$ teremos $x = 1,2$. Derivando implicitamente a equação (1) com relação a $t$ teremos*

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

*Logo*

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt} = -\frac{0,5}{1,2} \times (-0,2) = \frac{5}{10}\frac{10}{12}\frac{2}{10} = \frac{1}{12} m/s$$

$\blacksquare$

**Exercício 5** *Dado que*

$$x + y + xy = 3$$

*Derivando implicitamente com relação a $x$ teremos*

$$1 + y' + y + xy' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{-1-y}{1+x}$$

*E, no ponto $(1, 1)$ teremos portanto*

$$y' = -\frac{2}{2} = -1$$

*E a equação que passa pelo ponto $(1, 1)$ com coeficiente angular $-1$ é dada por*

$$y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

$\blacksquare$

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof°. Edson**

**3ª Prova** **2° Semestre** **2007**

**Data: Quarta-feira, 28 de Novembro de 2007** **Duração: 15:00 - 17:00**

---

**Problema 1** *Considere a função*

$$f(x) = 5 + 12x - 5x^3$$

*Encontre:*

**a).** *Os intervalos nos quais $f$ é crescente;*

**b).** *Os intervalos nos quais $f$ é decrescente;*

**c).** *Os intervalos abertos nos quais $f$ possui concavidade para baixo;*

**d).** *Os intervalos abertos nos quais $f$ possui concavidade para cima;*

**e).** *As coordenadas $x$ de todos os pontos de inflexão de $f$.*

**Problema 2** *Mostre que* $\ln(x+1) \leq x$ *se* $x \geq 0$.

**Problema 3** *Encontre as dimensões do retângulo com área máxima que pode ser inscrito em um círculo de raio* 10*cm.*

**Problema 4** *Calcule as integrais:*

**a).** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$;

**b).** $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$.

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelas curvas* $y^2 = 4x$ *e* $y = 2x - 4$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2007**
**Data: Sábado, 01 de Dezembro** **Turma A1**

---

**Exercício 1 a).** *Sabendo que*

$$f(x) = 5 + 12x - 5x^3$$

*segue-se que*

$$f'(x) = 12 - 15x^2$$

*e*

$$f''(x) = -30x$$

*O estudo de crescimento e decrescimento da função $f$ pode ser feito através do estudo de sinal da função $f'$. Para tanto, observe que*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 15x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

*e como $f'$ é uma função do segundo grau com concavidade voltada para baixo, segue-se que*

$$\begin{array}{l} f'(x) > 0 \ \textit{se}\ x \in \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right) \\ f'(x) < 0 \ \textit{se}\ x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, +\infty\right) \end{array}$$

*Logo,*

$$\begin{array}{l} f \ \textit{é crescente em} \ \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right) \\ f \ \textit{é decrescente em} \ \left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, +\infty\right) \end{array}$$

*De modo semelhante, o estudo de concavidades da função $f$ pode ser obtido através do estudo de sinal da função $f''$. Para tanto, observe que*

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -30x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

*e como $f''$ é uma função do primeiro grau decrescente, segue-se que*

$$\begin{array}{l} f''(x) > 0 \ \textit{se}\ x \in (-\infty, 0) \\ f''(x) < 0 \ \textit{se}\ x \in (0, +\infty) \end{array}$$

*Assim,*

$$\begin{array}{l} f \ \textit{possui concavidade p/cima em} \ (-\infty, 0) \\ f \ \textit{possui concavidade p/baixo em} \ (0, +\infty) \\ f \ \textit{possui ponto de inflexão p/} \ x = 0 \end{array}$$

*Em resumo, temos*

**a).** $\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$;

**b).** $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, +\infty\right)$;

**c).** $(0, +\infty)$;

**d).** $(-\infty, 0)$;

**e).** $x = 0$.

■

**Exercício 2** *Mostrar que*

$$\ln(x+1) \le x \ \textit{para}\ x \ge 0$$

*é equivalente a mostrar que*

$$\ln(x+1) - x \le 0 \ \textit{para}\ x \ge 0$$

*Para isto vamos fazer o estudo de crescimento da função*

$$f(x) = \ln(x+1) - x$$

*a fim de provar que*

$$f(x) \le 0 \ \textit{para}\ x \ge 0$$

*Observe então, que*

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$$

*e*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

*Como $f'$ é um quociente de duas funções do primeiro grau, através da análise do estudo de sinal de ambas, chegamos a seguinte conclusão*

$$f'(x) > 0 \ \textit{se}\ x \in (-1, 0)$$

$$f'(x) < 0 \ \textit{se}\ x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

*Assim, segue-se que*

$$\begin{array}{l} f \ \textit{é crescente em} \ (-1, 0) \\ f \ \textit{é decrescente em} \ (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ f(0) = 0 \end{array}$$

*e como conseqüência temos que*

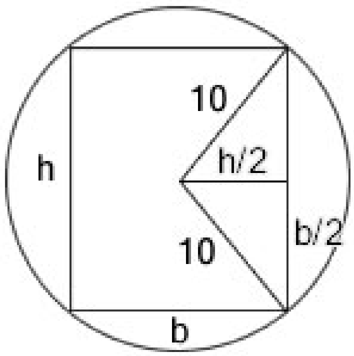
$$f(x) \le 0 \ \textit{para}\ x \ge 0$$

*Ou seja,*

$$\ln(x+1) \le x \ \textit{para}\ x \ge 0$$

■

**Exercício 3** *Considere o retângulo que está inscrito na circunferência tende base b e altura h conforme está na figura abaixo:*




*Usando o teorema de Pitágoras temos a seguinte relação*

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 100$$

*Ou seja,*

$$h^2 + b^2 = 400 \Leftrightarrow b = \sqrt{400 - h^2}$$

*e o retângulo terá sua área, dada em função da altura h, pela função*

$$A(h) = h\sqrt{400 - h^2}$$

*Para encontrarmos o seus extremos, basta resolvermos a equação*

$$A'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{h^2 - 200}{\sqrt{400 - h^2}} = 0 \Leftrightarrow h = 10\sqrt{2}$$

*Calculando $A''$ obtemos*

$$A''(h) = \frac{2h(h^2 - 600)}{\sqrt{(400 - h^2)^3}}$$

*donde temos que*

$$A''\left(10\sqrt{2}\right) = -4 < 0$$

*Logo $h = 10\sqrt{2}$ é um máximo da função $A(h)$ e as dimensões do retângulo procurado são $b = 10\sqrt{2}$ e $h = 10\sqrt{2}$.* ■

**Exercício 4**

**a).** *Tome $y = \ln x$ e observe que*

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

*Assim*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{dy}{y} \\ &= \ln|y| + k \\ &= \ln|\ln x| + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* □

**b).** *Usando integração por partes, considere*

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} du = 2xdx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

*Assim, temos que*

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int e^{-x} x dx$$

*Usando novamente integração por partes, considere*

$$\begin{cases} z = x \\ dw = e^{-x}dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} dz = dx \\ w = -e^{-x} \end{cases}$$

*Portanto*

$$\begin{aligned} \int e^{-x} x dx &= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + k \\ &= -e^{-x}(x+1) + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*E finalmente temos,*

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2\int e^{-x} x dx \\ &= -x^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x+1) + k \\ &= -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + k \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Calculando a intersecção entre as curvas dadas teremos*

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y \;\; = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \ e \ y = -2 \\ ou \\ x = 4 \ e \ y = 4 \end{array}$$

*Usando integração em relação a variável y temos a área da região procurada dada por*

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{4} \left( \tfrac{y+4}{2} - \tfrac{y^2}{4} \right) dy &= \tfrac{1}{4} \int_{-2}^{4} \left( 2y + 8 - y^2 \right) dy \\ &= \tfrac{1}{4} \left( y^2 + 8y - \tfrac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-2}^{4} \\ &= \tfrac{20}{3} + \tfrac{7}{3} \\ &= 9 \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**Prova Final** | **2$^{\text{o}}$ Semestre** | **2007**

**Data: Segunda-feira, 10 de Dezembro de 2007** | **Duração: 15:00 - 17:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$.

**Problema 2** *Um ponto $P$ move-se ao longo do gráfico de*

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

*de tal modo que a sua abcissa varia a uma velocidade constante de $5m/s$. Qual a velocidade de sua ordenada $y$ no instante em que $x = 10m$?*

**Problema 3** *Considere a função*

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$$

**a).** *Faça o estudo de crescimento e decrescimento da função $f$;*

**b).** *Faça o estudo de concavidades da função $f$;*

**c).** *Encontre os pontos de inflexão de $f$;*

**d).** *Esboce o gráfico de $f$.*

**Problema 4** *Uma caixa fechada com fundo quadrado deve ter um volume de 4.000cm$^3$. Determine as dimensões da caixa que possa ser fabricada com o mínimo de material.*

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 5 - 4x^2$ com $x > 0$.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2007**
**Data: Terça-feira, 11 de Dezembro** **Turma A1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que, quando* $x \to 1$,

$$x^{100} - x^2 + x - 1 \to 0$$

*e*

$$x^{10} - 1 \to 0$$

*Logo, usando a regra de L'Hospital, temos que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \tfrac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1} &= \lim_{x\to 1} \tfrac{100x^{99}-2x+1}{10x^9} \\ &= \tfrac{99}{10}\end{aligned}$$

$\square$

**b).** *Observe que, quando* $x \to +\infty$,

$$\ln x \to +\infty$$

*e*

$$e^{3x} \to +\infty$$

*Portanto, usando a regra de L'Hospital, segue-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3xe^{3x}} = 0$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Sabe-se que*

$$\frac{dx}{dt} = 5m/s,$$

*e que*

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

*usando a regra da cadeia temos que*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

*e, quando* $x = 10m$, *temos então*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-20}{(101)^2}5 = -\frac{100}{(101)^2}m/s$$

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Sabemos que*

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

**a).** *O estudo de crescimento e decrescimento da função* $f$ *pode ser obtido através do estudo de sinal da função* $f'$. *Para tanto, observe que*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2 - (x-1)(2x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} \\ &= \frac{-x^2+2x}{x^4}\end{aligned}$$

*Como* $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *o estudo de sinal da função* $f'$ *pode ser reduzido ao estudo de sinal da função*

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

*e como se trata de uma função de segundo frau, temos que*

$g(x) > 0$ *para* $x \in (0,2)$

$g(x) < 0$ *para* $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

*Ou seja,*

$f$ *é crescente em* $(0,2)$

$f$ *é decrescente em* $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$\square$

**b).** *O estudo de concavidades da função* $f$ *pode ser obtido através do estudo de sinal da função* $f''$. *Para tanto observe que*

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

*e portanto*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-x^3-(2-x)(3x^2)}{x^6} \\ &= \frac{-x^3-6x^2+3x^3}{x^6} \\ &= \frac{2x^3-6x^2}{x^6} \\ &= \frac{2x-6}{x^4} \end{aligned}$$

*Novamente, como $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o estudo de sinal da função $f''$ pode ser reduzido ao estudo de sinal da função*

$$h(x) = 2x - 6$$

*e como se trata de uma função do primeiro grau, temos que*

$$h(x) > 0 \text{ para } x \in (3, +\infty)$$

$$h(x) < 0 \text{ para } x \in (-\infty, 3)$$

*Assim,*

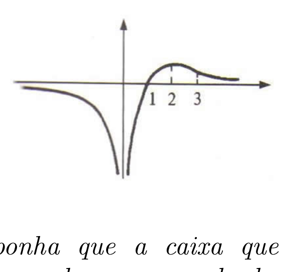
$f$ *possui concavidade para cima em* $(3, +\infty)$

$f$ *possui concavidade para baixo em* $(-\infty, 3)$

$\square$

**c).** *Como em $x = 3$ acontece o encontre de duas concavidades de nomes contrários, segue-se que $x = 3$ é um ponto de inflexão da função $f$. E como isto só ocorre uma vez, ele é único.* $\square$

**d).** *Juntando o que foi obtido nos itens anterios, um esboço do gráfico seria*




**Exercício 4** *Suponha que a caixa que desejamos construir tenha como base um quadrado de lado $l$ e sua altura seja $h$. Assim, o seu volume seria*

$$V = l^2 h$$

*mas, por outro lado sabemos que*

$$V = 4000$$

*Logo, segue-se que*

$$l^2 h = 4000 \Leftrightarrow h = \frac{4000}{l^2}$$

*A área da superfície desta caixa é*

$$A = 2l^2 + 4lh$$

*ou seja,*

$$\begin{aligned} A(l) &= 2l^2 + 4l\frac{4000}{l^2} \\ &= 2l^2 + \frac{16000}{l} \end{aligned}$$

*Para descobrirmos os extremos desta função, precisamos resolver a equação*

$$A'(l) = 0$$

*que é equivalente a*

$$4l - \frac{16000}{l^2} = 0 \Leftrightarrow l^3 = 4000 \Leftrightarrow l = 10\sqrt[3]{4}$$

*Observe ainda, que*

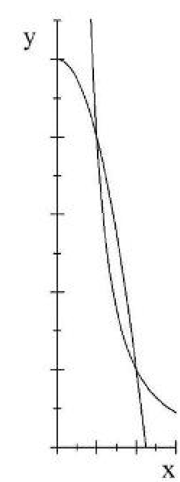
$$A''(l) = 4 + \frac{32000}{l^3}$$

*e*

$$A''(10\sqrt[3]{4}) = 12 > 0$$

*e isto significa que $l = 10\sqrt[3]{4}$ realmente é um minmizante para a a função $A$. Assim as dimensões da caixa são $l = 10\sqrt[3]{4}cm$ e $h = \frac{4000}{l^2} = 10\sqrt[3]{4}$.* $\blacksquare$

**Exercício 5** *Fazendo esboço do gráfico das duas curvas obtemos*




*Calculando a interseção entre as duas curvas temos*

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = 5 - 4x^2 \end{cases}$$

*Donde segue-se que*

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{x^2} = 5 - 4x^2 & \quad \Leftrightarrow \\
x^2(5 - 4x^2) = 1 & \quad \Leftrightarrow \\
5x^2 - 4x^4 - 1 = 0 & \quad \Leftrightarrow \\
x = \pm\tfrac{1}{2} \text{ ou } x = \pm 1 &
\end{aligned}$$

*Como* $x > 0$ *temos que a área da região em questão sera pada por*

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(5 - 4x^2 - \tfrac{1}{x^2}\right) dx &= 5x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \tfrac{14}{3} - \tfrac{13}{3} \\
&= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1ª Prova** | **2º Semestre** | **2007**

**Data: Segunda-feira, 10 de Setembro de 2007** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

*a).* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos\, x}$;

*b).* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$.

**Problema 2** *Seja $f$ uma função tal que $|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f$ é contínua em $x = 1$.*

**Problema 3** *Calcule os limites:*

*a).* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos\, h - 1}{h}$;

*b).* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\text{sen}(\frac{\pi}{8} + h) - \text{sen}\, \frac{\pi}{8}}{h}$.

**Problema 4** *Seja $f$ uma função tal que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

*Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x}$.

**Problema 5** *Calcule os limites:*

*a).* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;

*b).* $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2007**
**Data: Segunda-feira, 10 de Setembro** **Prof$^o$. Edson**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que* $\cos 0 = 1$, *logo*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

$\square$

**b).** *Observe que*

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2+x-6)$$

*e*

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x^2-4)$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\tfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-2x^2-4x+8} &= \lim_{x\to 2}\tfrac{(x-2)(x^2+x-6)}{(x-2)(x^2-4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\tfrac{x^2+x-6}{x^2-4}\end{aligned}$$

*Observe novamente que*

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

*e*

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-2x^2-4x+8} &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}\\ &= \tfrac{5}{4}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Para mostrar que a função $f$ é contínua em $x = 1$ precisamos mostrar que*

**i.** $f(1)$ *existe;*

**ii.** $\lim_{x\to 1} f(x)$ *existe;*

**iii.** $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

*Para provar o item (i), observe que*

$$|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$$

*para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e como o $f(1)$ é usado nesta expressão, segue-se que $f(1)$ existe.*

*Além disto temos que*

$$|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-(x-1)^2 \leq f(x) - f(1) \leq (x-1)^2$$

*Observe agora que*

$$\lim_{x\to 1}\left[-(x-1)^2\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$$

*logo, pelo teorema do confronto segue-se que*

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x) - f(1)\right] = 0$$

*ou seja,*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*o que prova os itens (ii) e (iii) e conseqüentemente prova que a função $f$ é contínua em $x = 1$.* $\blacksquare$

**Exercício 3**

**a).**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\cdot\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\text{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\text{sen }h}{h}\cdot\frac{\text{sen }h}{\cos h + 1}\\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

**b).** *Considere*

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}+h\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{h}$$

*Temos que*

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\cos h + \operatorname{sen}\ h \cos\frac{\pi}{8} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{8}\tfrac{(\cos h - 1)}{h} + \cos\tfrac{\pi}{8}\tfrac{\operatorname{sen}\ h}{h}\right] \\ &= \cos\tfrac{\pi}{8} \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Por hipótese temos que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$$

*Desejamos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x}$$

*Para isto, tome* $y = x^2$ *e observe que*

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

*e*

$$x = \pm\sqrt{y}$$

*Assim temos que*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\tfrac{f(x^2)}{x} &= \lim_{y\to 0}\tfrac{f(y)}{\pm\sqrt{y}} \\ &= \lim_{y\to 0}\pm\sqrt{y}\tfrac{f(y)}{y} \\ &= 0\cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

■

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt{1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

*b). Tome* $y = 2x$ *e observe que*

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

*e alé, disto, temos*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}} \\ &= \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^2 \\ &= e^2 \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Coelgiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2ª Prova** | **2º Semestre** | **2007**

**Data: Segunda-feira, 22 de Outubro de 2007** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Encontre a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e a reta tangente ao gráfico de* $y = x^{-1} - x$ *no ponto* $(1, 0)$.

**Problema 2** *Mostre que a função* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *é contínua em* $x = 0$ *mas não é diferenciável em* $x = 0$.

**Problema 3** *Encontre* $y'(1)$ *para*

*a).* $y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + 2}{x}$;

*b).* $y = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

**Problema 4** *Uma escada de* $1,7m$ *está apoiada em uma parede. Se sua base for puxada ao longo do chão, afastando-se da parede a uma taxa constante de* $0,5m/s$, *com que rapidez o topo da escada estará se movendo para baixo na parede quando estiver* $0,8m$ *acima do solo?.*

**Problema 5** *Encontre todas as retas que são simultaneamente tangentes ao gráfico de* $y = x^2 + 1$ *e ao gráfico de* $y = -x^2 - 1$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2007**
**Data: Terça-feira, 23 de Outubro** **Turma C1**

---

**Exercício 1** *A reta tangente ao gráfico da função*

$$y = x^{-1} - x$$

*no ponto* $(1, 0)$ *é dada por*

$$y - 0 = m(x - 1) \tag{1}$$

*onde*

$$m = y'(1)$$

*Calculando* $y'$ *temos*

$$y'(x) = -x^{-2} - 1 = \frac{-1}{x^2} - 1$$

*Donde temos que*

$$m = y'(1) = -2$$

*e, voltando a equação* $(1)$ *da reta que estamos procurando, teremos*

$$y = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 \tag{2}$$

*Esta reta juntamente com os eixos coordenados formam um triângulo retângulo cuja base é a abcissa de sua intersecção com o eixo* $x$ *e altura é a ordenada de sua interseção com o eixo* $y$*. Para encontrarmos a interseção da reta* $(2)$ *com o eixo* $x$*, fazemos* $y = 0$ *e obtemos* $x = 1$*, que é a* ***base*** *do triângulo. De modo análogo, para encontrarmos a interseção da reta* $(2)$ *com o eixo* $y$*, fazemos* $x = 0$ *e obtemos* $y = 2$ *que é a* ***altura*** *do triângulo. Logo a área deste triângulo é*

$$\frac{\textbf{base} \times \textbf{altura}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

■

**Exercício 2** *Observe que*

**i.** $f(0) = 0$*, portanto* $f(0)$ *existe;*

**ii.** $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$*;*

**iii.** $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

*Assim, segue-se de (i),(ii), (iii) e da definição de continuidade de uma função num ponto, que* $f$ *é contínua em* $x = 0$*.*
*Por outro lado, observe que*

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

*donde, podemos-se ver que* $f'$ *existe para qualquer* $x \neq 0$*, ou seja* $f$ *não é diferenciável em* $x = 0$*.* ■

**Exercício 3**

**a).** *Dado que* $y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + 2}{x}$*, segue-se que*

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}x - \left(x^{\frac{3}{2}} + 2\right)}{x^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}x - x^{\frac{3}{2}} - 2}{x^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} - 2}{x^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - 2}{x^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^3} - 4}{2x^2}
\end{aligned}$$

*Logo*

$$y'(1) = -\frac{3}{2}$$

□

**b).** *Dado que* $y = \dfrac{\sec x}{1 + \text{tg } x}$, *segue-se que*

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\sec x \text{tg } x(1+\text{tg } x) - \sec^3 x}{(1+\text{tg } x)^2} \\ &= \frac{\sec x \text{tg } x + \sec x \text{tg}^2 x - \sec^3 x}{(1+\text{tg } x)^2} \\ &= \frac{\sec x \text{tg } x + \sec x \left(\sec^2 x - 1\right) - \sec^3 x}{(1+\text{tg } x)^2} \\ &= \frac{\sec x \text{tg } x + \sec^3 x - \sec x - \sec^3 x}{(1+\text{tg } x)^2} \\ &= \frac{\sec x \text{tg } x - \sec x}{(1+\text{tg } x)^2} \\ &= \frac{\sec x \left(\text{tg } x - 1\right)}{(1+\text{tg } x)^2} \end{aligned}$$

*Logo*

$$y'(1) = \frac{\sec 1 \left(\text{tg } 1 - 1\right)}{(1+\text{tg } 1)^2}$$

■

**Exercício 4** *Pelo que é dado no problema, se chamarmos de $x$ a distância da base da escada à parede e de $y$ a altura do topo da escada em relação ao chão, usando o teorema de Pitágoras, teremos que*

$$x^2 + y^2 = (1,7)^2 \tag{3}$$

*e quando $y = 0,8$ teremos $x = 1,5$. Derivando implicitamente a equação (3) com relação a $t$ teremos*

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

*Logo*

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{1,5}{0,8}0,5 = -\frac{15}{10}\frac{10}{8}\frac{1}{2} = -\frac{15}{16}m/s$$

■

**Exercício 5** *Suponha que a reta que procuramos seja*

- *tangente ao gráfico de $y = x^2 + 1$ no ponto cuja abcissa é $p$*
- *tangente ao gráfico de $y = -x^2 - 1$ no ponto cuja abcissa é $q$*

*Assim, esta reta passa pelo ponto $(p, p^2+1)$ com coeficiente angular $2p$ e pelo ponto $(q, -q^2-1)$ com coeficiente angular $-2q$, logo deverá ter equações*

$$y - (p^2+1) = 2p(x-p) \Leftrightarrow y = 2px - p^2 + 1 \tag{4}$$

*e*

$$y - (-q^2-1) = -2q(x-q) \Leftrightarrow y = -2qx + q^2 - 1 \tag{5}$$

*e estas equações devem ser iguais, ou seja*

$$\begin{cases} 2p = -2q \\ -p^2 + 1 = \quad q^2 - 1 \end{cases}$$

*Donde, resolvendo este sistema, encontramos $p = 1$ e $q = -1$ ou $p = -1$ e $q = 1$. Substituindo estes valores nas equações (4) e (5) teremos*

$$y = 2x \text{ ou } y = -2x$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**3$^{a}$ Prova** **2$^{o}$ Semestre** **2007**

**Data: Quarta-feira, 28 de Novembro de 2007** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Considere a função*

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$$

*Encontre:*

**a).** *Os intervalos nos quais $f$ é crescente;*

**b).** *Os intervalos nos quais $f$ é decrescente;*

**c).** *Os intervalos abertos nos quais $f$ possui concavidade para baixo;*

**d).** *Os intervalos abertos nos quais $f$ possui concavidade para cima;*

**e).** *As coordenadas $x$ de todos os pontos de inflexão de $f$.*

**Problema 2** *Mostre que $e^x \geq 1 + x$ se $x \geq 0$.*

**Problema 3** *Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo de lados $6, 8$ e $10$ cm. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área, supondo que dois dos lados deste retângulo estão sobre os catetos do triângulo retângulo.*

**Problema 4** *Calcule as integrais:*

**a).** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$;

**b).** $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x dx$.

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelas curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito 3$^{\text{a}}$ Prova** **2007**
**Data: Segunda-feira, 03 de Dezembro** **Turma C1**

---

**Exercício 1 a).** *Sabendo que*

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$$

*segue-se que*

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 18x$$

*e*

$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 18$$

*O estudo de crescimento e decrescimento da função $f$ pode ser feito através do estudo de sinal da função $f'$. Para tanto, observe que*

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4x^3 - 15x^2 + 18x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x\left(4x^2 - 15x + 18\right) = 0$$

*Esta equação possui $x = 0$ como sua única solução real pois a função*

$$g(x) = 4x^2 - 15x + 18$$

*possui discriminante*

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18 = -63 < 0$$

*e isto implica dizer que a mesma não possui solução real e, além, disso, como se trata de uma função do segundo grau e sua concavidade está voltada para cima, podemos concluir também que*

$$4x^2 - 15x + 18 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

*Logo,*

$$\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ se } x > 0 \\ f'(x) < 0 \text{ se } x < 0 \\ f'(x) = 0 \text{ se } x = 0 \end{array}$$

*e, em conseqüência disto, temos que*

$$\begin{array}{l} f \text{ é crescente em } (0, +\infty) \\ f \text{ é decrescente em } (-\infty, 0) \end{array}$$

*De modo semelhante, o estudo de concavidades da função $f$ pode ser obtido através do estudo de sinal da função $f''$. Para tanto, observe que*

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$12x^2 - 30x + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$6(2x^2 - 5x + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ou } x = \tfrac{3}{2}$$

*e como $f''$ é uma função do segundo grau com concavidade voltada para cima, segue-se que*

$$\begin{array}{l} f''(x) > 0 \text{ se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\tfrac{3}{2}, +\infty\right) \\ f''(x) < 0 \text{ se } x \in \left(1, \tfrac{3}{2}\right) \end{array}$$

*Assim,*

$$\begin{array}{l} f \text{ possui concavidade p/cima em } (-\infty, 1) \cup \left(\tfrac{3}{2}, +\infty\right); \\ f \text{ possui concavidade p/baixo em } \left(1, \tfrac{3}{2}\right); \\ f \text{ possui pontos de inflexão em } x = 1 \text{ e } x = \tfrac{3}{2}; \end{array}$$

*Em resumo, temos*

**a).** $(0, +\infty)$;

**b).** $(-\infty, 0)$;

**c).** $\left(1, \frac{3}{2}\right)$;

**d).** $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$;

**e).** $x = 1$ *e* $x = \frac{3}{2}$.

■

**Exercício 2** *Mostrar que*

$$e^x \geq x + 1 \text{ para } x \geq 0$$

*é equivalente a mostrar que*

$$e^x - x - 1 \geq 0 \text{ para } x \geq 0$$

*Para isto, considere a função*

$$f(x) = e^x - x - 1$$

*e observe que*

$$f(0) = 0$$

*e*

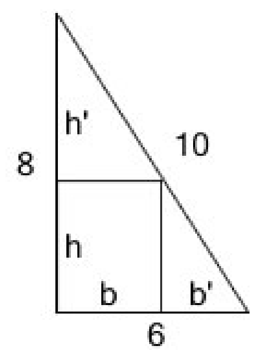
$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \text{ se } x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f \text{ é crescente para } x \geq 0$$

*Ou seja, em $x = 0$ a função assume valor $0$ e a partir daí ela é sempre crescente, o que nos permite dizer que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, ou seja*

$$e^x \geq x + 1 \text{ para } x \geq 0$$

■

**Exercício 3** *Considere o retângulo que está inscrito no triângulo retângulo conforme a figura abaixo:*




*Observe que*

$$\begin{matrix} h + h' = 8 \\ b + b' = 6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} h' = 8 - h \\ b' = 6 - b \end{matrix}$$

*Usando semelhança de triângulo segue-se que*

$$\frac{h'}{b} = \frac{h}{b'} \Leftrightarrow \frac{8-h}{b} = \frac{h}{6-b} \Leftrightarrow (8-h)(6-b) = bh$$

*Ou seja,*

$$4b + 3h = 24$$

*e o retângulo terá sua área, dada em função da altura h, pela função*

$$A(h) = hb = h\frac{24 - 3h}{4}$$

*Para encontrarmos o seus extremos, basta resolvermos a equação*

$$A'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(24 - 6h) = 0 \Leftrightarrow h = 4$$

*Calculando $A''$ obtemos*

$$A''(h) = -\frac{3}{2}$$

*donde temos que*

$$A''(4) = -\frac{3}{2} < 0$$

*Logo $h = 4$ é um máximo da função $A(h)$ e as dimensões do retângulo procurado são $h = 4$ e $b = 3$.*

■

**Exercício 4**

**a).** *Tome $u = \sqrt{x}$ e observe que*

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2udu = dx$$

*Assim*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \int \frac{2udu}{u(1+u^2)} \\ &= 2\int \frac{du}{(1+u^2)} \\ &= 2\text{arctg } u + k \\ &= 2\text{arctg } \sqrt{x} + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* □

**b).** *Usando integração por partes, considere*

$$\begin{cases} u = \text{arcsen } x \\ dv = dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{cases}$$

*Assim, temos que*

$$\int \text{arcsen } x dx = x\text{arcsen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

*Usando agora integração por substituição, considere $z = 1 - x^2$ e observe que $dz = -2xdx$. Assim temos que*

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1-x^2}dx &= -\int \frac{dz}{2\sqrt{z}} \\ &= -\sqrt{z} + k \\ &= -\sqrt{1-x^2} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*E, finalmente temos,*

$$\begin{aligned} \int \text{arcsen } x dx &= x\text{arcsen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\text{arcsen } x + \sqrt{1-x^2} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Calculando a intersecção entre as curvas dadas teremos*

$$\begin{cases} y^2 = x \\ \\ y \ = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \ \ e \ y = -1 \\ ou \\ x = 4 \ \ e \ y = 2 \end{array}$$

*Usando integração em relação a variável y temos a área da região procurada dada por*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right) dy &= \tfrac{1}{2}y^2 + 2y - \tfrac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{2} \\ &= \tfrac{10}{3} - \left(-\tfrac{7}{6}\right) \\ &= \tfrac{20+7}{6} \\ &= \tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**Prova Final** **2$^{o}$ Semestre** **2007**

**Data: Segunda-feira, 10 de Dezembro de 2007** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$.

**Problema 2** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até a 2ª ordem e seja $g$ uma função dada por*

$$g(x) = f(x^2)$$

*Calcule $g''(2)$, sabendo que $f'(4) = 2$ e $f''(4) = 3$.*

**Problema 3** *Considere a função*

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$$

**a).** *Faça o estudo de crescimento e decrescimento da função $f$;*

**b).** *Faça o estudo de concavidades da função $f$;*

**c).** *Encontre os pontos de inflexão de $f$;*

**d).** *Esboce o gráfico de $f$.*

**Problema 4** *Uma caixa aberta com fundo quadrado deve ter um volume de 4.000$cm^3$. Determine as dimensões da caixa que possa ser fabricada com o mínimo de material.*

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = -x^2 + 5x$, $y = x^3 - x$ com $x \geq 0$.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabario Prova Final** **2007**

**Data: Terça-feira, 11 de Dezembro** **Turma C1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que, quando $x \to -1$,*

$$4x^3 + x^2 + 3 \to 0$$

*e*

$$x^5 + 1 \to 0$$

*Logo, usando a regra de L'Hospital, temos que*

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{12x^2 + 2x}{5x^4} = \frac{10}{5} = 2$$

$\square$

**b).** *Observe que, quando $x \to +\infty$,*

$$e^{3x} \to +\infty$$

*e*

$$x^2 \to +\infty$$

*Portanto, usando a regra de L'Hospital, segue-se que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{2x}$$

*Observe novamente que, quando $x \to +\infty$,*

$$3e^{3x} \to +\infty$$

*e*

$$2x \to +\infty$$

*e, usando a regra de L'Hospital outra vez, temos*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = +\infty$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Dado que*

$$g(x) = f(x^2),$$

*usando a regra da cadeia teremos que*

$$g'(x) = 2xf'(x^2)$$

*e, derivando novamente usando a regra da cadeia, teremos*

$$g''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$$

*e, como $f'(4) = 2$ e $f''(4) = 3$, segue-se que*

$$g''(x) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4 + 48 = 52$$

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Sabemos que*

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$$

**a).** *O estudo de crescimento e decrescimento da função $f$ pode ser obtido através do estudo de sinal da função $f'$. Para tanto, observe que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)x^2 - (x^2 - x + 1)(2x)}{x^4} \\ &= \frac{2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 2x}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{x^4} \end{aligned}$$

*Como $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o estudo de sinal da função $f'$ pode ser reduzido ao estudo de sinal da função*

$$g(x) = x^2 - 2x$$

*e como se trata de uma função de segundo frau, temos que*

$g(x) > 0$ *para* $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$g(x) < 0$ *para* $x \in (0, 2)$

*Ou seja,*

$f$ *é crescente em* $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$f$ *é decrescente em* $(0, 2)$

$\square$

**b).** *O estudo de concavidades da função $f$ pode ser obtido através do estudo de sinal da função $f''$. Para tanto observe que*

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

*e portanto*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^3 - (x-2)(3x^2)}{x^6} \\ &= \frac{x^3 - 3x^3 + 6x^2}{x^6} \\ &= \frac{-2x^3 + 6x^2}{x^6} \\ &= \frac{6-2x}{x^4} \end{aligned}$$

*Novamente, como $x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o estudo de sinal da função $f''$ pode ser reduzido ao estudo de sinal da função*

$$h(x) = 6 - 2x$$

*e como se trata de uma função do primeiro grau, temos que*

$$h(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, 3)$$

$$h(x) < 0 \text{ para } x \in (3, +\infty)$$

*Assim,*

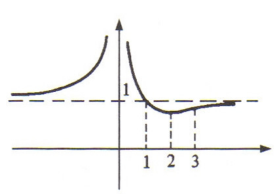
$$f \text{ possui concavidade para cima em } (-\infty, 3)$$

$$f \text{ possui concavidade para baixo em } (3, +\infty)$$

$\square$

**c).** *Como em $x = 3$ acontece o encontre de duas concavidades de nomes contrários, segue-se que $x = 3$ é um ponto de inflexão da função $f$. E como isto só ocorre uma vez, ele é único.* $\square$

**d).** *Juntando o que foi obtido nos itens anteriores, um esboço do gráfico seria*




**Exercício 4** *Suponha que a caixa que desejamos construir tenha como base um quadrado de lado $l$ e sua altura seja $h$. Assim, o seu volume seria*

$$V = l^2 h$$

*mas, por outro lado sabemos que*

$$V = 4000$$

*Logo, segue-se que*

$$l^2 h = 4000 \Leftrightarrow h = \frac{4000}{l^2}$$

*A área da superfície desta caixa é*

$$A = l^2 + 4lh$$

*ou seja,*

$$\begin{aligned} A(l) &= l^2 + 4l\frac{4000}{l^2} \\ &= l^2 + \frac{16000}{l} \end{aligned}$$

*Para descobrirmos os extremos desta função, precisamos resolver a equação*

$$A'(l) = 0$$

*que é equivalente a*

$$2l - \frac{16000}{l^2} = 0 \Leftrightarrow l^3 = 8000 \Leftrightarrow l = 20$$

*Observe ainda, que*

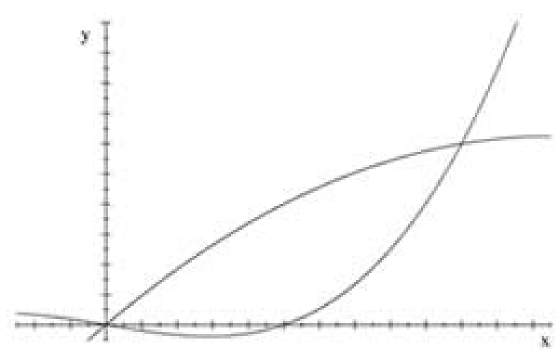
$$A''(l) = 2 + \frac{32000}{l^3}$$

*e*

$$A''(20) = 6 > 0$$

*e isto significa que $l = 20$ realmente é um minmizante para a a função $A$. Assim as dimensões da caixa são $l = 20cm$ e $h = \frac{4000}{l^2} = 10cm$.* $\blacksquare$

**Exercício 5** *Fazendo esboço do gráfico das duas curvas obtemos*



*Calculando a interseção entre as duas curvas temos*

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ \\ y = x^3 - x \end{cases}$$

*Donde segue-se que*

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x = x^3 - x \qquad & \Leftrightarrow \\ x^3 + x^2 - 6x = 0 \qquad & \Leftrightarrow \\ x(x^2 + x - 6) = 0 \qquad & \Leftrightarrow \\ x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -3 & \end{aligned}$$

*Como $x \geq 0$ temos que a área da região em questão sera pada por*

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[(-x^2 + 5x) - (x^3 - x)\right] dx &= \int_0^2 \left(-x^2 + 6x - x^3\right) dx \\ &= -\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\Big|_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1ª Prova** | **2º Semestre** | **2009**

**Data: 16 de Setembro** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ \mathrm{sen}\frac{1}{x}$.

**Problema 2** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}$$

**Problema 3** *Determine o valor da constante $k$, de modo que a função*

$$f(x)=\begin{cases} 7x-2, \ x\leq 1 \\ \\ kx^2, \ x>1 \end{cases}$$

*seja contínua em todo o conjunto $\mathbb{R}$. Justifique sua resposta.*

**Problema 4** *Calcule os limites*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)^x}{x^x}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{sen}\ \pi x}{x-1}$.

**Problema 5** *Calcule os limites*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ (1+x)}{x}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1}$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabarito 1$^a$ Prova** **2009**
**Data: Quarta-feira, 16 de Setembro** **Turma 11**

---

**Exercício 1**

**a).**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}} &= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}}\frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1-x)(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1+x}\\
&= 2
\end{aligned}$$

□

**b).** *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

*Tome* $y=\dfrac{1}{x}$ *e perceba que*

$$x\to+\infty \Rightarrow y\to 0$$

*Logo*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\,\operatorname{sen}\tfrac{1}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\, y}{y}\\
&= 1
\end{aligned}$$

■

**Exercício 2**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})\frac{(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})}{(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2(1+\frac{a}{x})}+\sqrt{x^2(1+\frac{b}{x})}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a-b)}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}} =$$

$$\frac{a-b}{2}$$

■

**Exercício 3** *Sabemos que*

$$f(x)=\begin{cases} 7x-2, & x\le 1\\ kx^2, & x>1\end{cases}$$

*Observe porém que, quando* $x<1$ *temos*

$$f(x)=7x-2$$

*ou seja, $f$ é uma função polinomial para $x<1$ e isto nos permite afirmar que a mesma é contínua para qualquer $x<1$. Pensando do mesmo modo, quando $x>1$ teremos*

$$f(x)=kx^2,$$

*que também é polinomial para $x>1$ e da mesma forma, contínua para todo $x>1$. Assim, para que* *a função $f$ seja continua para todo o conjunto $\mathbb{R}$, falta apenas que a mesma seja contínua em $x = 1$. Para uqe isto seja verdade devemos verificar três propriedades, que são*

**i).** *Devemos verificar que $f(1)$ existe. Mas pela definição da função temos que $f(1) = 5$, o que prova que $f(1)$ existe.*

**ii).** *Devemos verificar também que*

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

*Para isto, devemos ter*

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 1^+} kx^2 = \lim_{x\to 1^-} 7x - 2 \\ \Leftrightarrow \\ k = 5\end{gathered}$$

**iii).** *As propriedades (i) e (ii) devem ser iguais, ou seja*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*Assim, as três propriedades são satisfeitas se $k = 5$.* ■

**Exercício 4**

**a).** *Considere $y = x - 1$ e observe que*

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

*e, além disto segue-se que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^x}{x^x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x \\ &= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{y+1} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1}} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}\left(1+\frac{1}{y}\right)} \\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

□

**b).** *Considere $y = x - 1$ e observe que*

$$x \to 1 \Rightarrow y \to 0$$

*e, além disto segue-se que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen } \pi x}{x-1} &= \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen } \pi(y+1)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen } \pi y \cos \pi + \sin \pi \cos \pi y}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-\text{sen } \pi y}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-\text{sen } \pi y}{\pi y}\pi \\ &= -\pi\end{aligned}$$

■

**Exercício 5**

**a).**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) \\ &= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

*Tome $y = \dfrac{1}{x}$ e observe que que*

$$x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$$

*e*

$$x \to 0^- \Rightarrow y \to -\infty$$

*Assim, temos que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \ln(1+\tfrac{1}{y})^y \\ &= \ln e \\ &= 1\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{y\to-\infty} \ln(1+\tfrac{1}{y})^y \\ &= \ln e \\ &= 1\end{aligned}$$

*Ou seja,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

□

**b).**

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1} &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1}\,\frac{1+\cos 3h}{1+\cos 3h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 3h}{-\mathrm{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 3h}{-\mathrm{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 3h}{-\mathrm{sen}^2 5h(1+\cos 3h)\frac{25h^2}{25h^2}}\,\frac{9h^2}{9h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{9\left(\frac{\mathrm{sen}\ 3h}{3h}\right)^2}{-25\left(\frac{\mathrm{sen}\ 5h}{5h}\right)^2(1+\cos 3h)}\\
&= -\frac{9}{50}
\end{aligned}
$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{a}$ Prova** | **2$^{o}$ Semestre** | **2009**

**Data: 11 de Novembro** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada:*

*a).* $y = x5^{x^2}$;

*b).* $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right)$.

**Problema 2** *Sejam* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma outra função dada por* $f(x) = e^x g(3x+1)$. *Calcule* $f'(0)$ *sabendo que* $g(1) = 2$ *e* $g'(1) = 3$.

**Problema 3** *A função diferenciável* $y = f(x)$ *é dada implicitamente pela equação*

$$3x^2 + x\mathrm{sen}\ y = 2$$

*Supondo que* $x\cos y \neq 0$ *para todo* $x \in D_f$, *calcule* $\dfrac{dy}{dx}$.

**Problema 4** *Determine uma reta paralela à reta* $x + y = 1$ *e tangente à curva*

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

**Problema 5** *A altura* $h$ *e o raio* $r$ *da base de um cone circular reto estão variando a taxas constantes de 0,1m/s e 0,3m/s, respectivamente. A que taxa estará variando o volume do cone no instante em que* $h = 0,5m$ *e* $r = 0,2m$ *?*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2009**
**Data: Quinta-feira, 19 de Novembro** **Turma 11**

---

## Exercício 1

**a).** *Considere a função*

$$h(x) = 5^{x^2}$$

*Tome*

$$u(x) = 5^x$$

$$v(x) = x^2$$

*e observe que*

$$u'(x) = 5^x \ln 5$$

$$v'(x) = 2x$$

*e*

$$h(x) = u(v(x))$$

*Donde, usando a regra da cadeia, teremos que*

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(v(x))v'(x) \\ &= 5^{x^2} \ln 5 (2x) \\ &= 2x \ln 5 \cdot 5^{x^2} \end{aligned}$$

*Observe agora que*

$$y(x) = xh(x)$$

*e, usando a regra do produto, teremos*

$$\begin{aligned} y'(x) &= h(x) + xh'(x) \\ &= 5^{x^2} + x(2x \ln 5 \cdot 5^{x^2}) \\ &= 5^{x^2} \left(1 + 2x^2 \ln 5\right) \end{aligned}$$

□

**b).** *Considere a função*

$$p(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

*Tome*

$$u(x) = \operatorname{tg} x$$

$$v(x) = \tfrac{x}{2}$$

*e observe que*

$$u'(x) = \sec^2 x$$

$$v'(x) = \frac{1}{2}$$

*e*

$$p(x) = u(v(x))$$

*Donde, usando a regra da cadeia, teremos que*

$$\begin{aligned} p'(x) &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{x}{2} \end{aligned}$$

*Considere agora a função*

$$q(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 + p(x)}{1 - p(x)}$$

*Usando a regra do quociente, teremos que*

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{p'(x)\left[1 - p(x)\right] - \left[1 + p(x)\right]\left[-p'(x)\right]}{\left[1 - p(x)\right]^2} \\ &= \frac{2p'(x)}{\left[1 - p(x)\right]^2} \\ &= \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left[1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right]^2} \end{aligned}$$

*Por fim, observe que*

$$g(x) = \ln\left(q(x)\right)$$

*e, usando a regra da cadeia, teremos que*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{q(x)} q'(x) \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left[1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right]^2} \\ &= \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Precisamos inicialmente calcular a derivada da função*

$$f(x) = e^x g(3x+1)$$

*Para isto, considere*

$$h(x) = 3x + 1$$

*e*

$$p(x) = g(3x+1)$$

*Observe então que*

$$p(x) = g(h(x))$$

*Portanto, usando a regra da cadeia, teremos*

$$\begin{aligned} p'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= 3g'(3x+1) \end{aligned}$$

*Observe agora que*

$$f(x) = e^x p(x)$$

*e usando a regra de derivação do produto teremos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x p(x) + e^x p'(x) \\ &= e^x \left[p(x) + p'(x)\right] \\ &= e^x \left[g(3x+1) + 3g'(3x+1)\right] \end{aligned}$$

*Donde segue-se que*

$$f'(0) = e^0 \left[g(1) + 3g'(1)\right]$$

*Como sabemos que* $g(1) = 2$ *e* $g'(1) = 3$*, segue-se que*

$$f'(0) = 2 + 3 \cdot 3 = 11$$

■

**Exercício 3** *Sabemos que* $y = f(x)$ *é dada implicitamente através da equação*

$$3x^2 + x\operatorname{sen} y = 2$$

*Derivando implicitamente esta equação em relação a* $x$*, obtemos*

$$6x + \operatorname{sen} y + x\cos y \frac{dy}{dx} = 0$$

*Donde, segue-se que*

$$x\cos y \frac{dy}{dx} = -6x - \operatorname{sen} y$$

*Como foi dito que* $x\cos y \neq 0$*, temos que*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x - \operatorname{sen} y}{x\cos y}$$

■

**Exercício 4** *Seja* $(p, q)$ *o ponto onde a reta procurada tangencia a curva*

$$x^2 + xy + y^2 = 3 \qquad (1)$$

*Como este ponto também pertence à curva, podemos afirmar que*

$$p^2 + pq + q^2 = 3 \qquad (2)$$

*Por outro lado, sabemos que a reta que procuramos deve ser paralela à reta* $x + y = 1$*, ou seja, seu coeficiente angular deve ser igual a -1. Derivando implicitamente a equação (1) em relação a* $x$ *teremos*

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$

*Donde, isolando* $y'$ *obtemos*

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

*ou seja, o coeficiente angular da reta que tangencia a curva no ponto* $(p, q)$ *é dado por*

$$m = y'(p) = \frac{-2p - q}{p + 2q}$$

*e como sabemos, este coeficiente deve ser igual a* $-1$*, devemos ter então que*

$$\frac{-2p - q}{p + 2q} = -1$$

*Logo, resolvendo esta equação teremos*

$$p = q$$

*Substituindo este resultado na equação (2) teremos*

$$p = \pm 1$$

*Assim, encontramos que o ponto de tangência pode ser o ponto* $(1, 1)$ *ou o ponto* $(-1, -1)$ *e as retas tangenstes à curva dada neste pontos são, respectivamente*

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

*e*

$$y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$$

■

**Exercício 5** *Sabemos que o volume de um cone circular reto de altura $h$ e raio da base $r$, é dado por*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

*Como a medida da altura e do raio está variando com o passar do tempo, segue-se que*

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \left[r(t)\right]^2 h(t)$$

*Assim, derivando em relação a $t$ obtemos a taxa de variação do volume do cone em relação ao tempo, ou seja*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \left[2r(t)h(t)\frac{dr}{dt} + r^2(t)\frac{dh}{dt}\right]$$

*Como é informado no enunciado do problema que*

$$\frac{dh}{dt} = 0,1m/s$$

$$\frac{dr}{dt} = 0,3m/s$$

*no instante em que $h = 0,5m$ e $r = 0,2m$, segue-se então que neste instante deveremos ter*

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \tfrac{1}{3}\pi\left[2\cdot 0,2\cdot 0,5\cdot 0,3 + (0,2)^2\cdot 0,1\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\pi\left[2\cdot \tfrac{2}{10}\cdot \tfrac{5}{10}\cdot \tfrac{3}{10} + \tfrac{4}{100}\cdot \tfrac{1}{10}\right] \\ &= \tfrac{64\pi}{3000} m^3/s \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**3$^a$ Prova** **2$^o$ Semestre** **2009**

**Data: 02 de Dezembro** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função*

$$f(x) = \frac{\ln\ x}{x}$$

**Problema 2** *Faça o estudo de concavidade e determine os pontos de inflexão da função*

$$f(x) = x \ln\ x$$

**Problema 3** *Calcule os limites*

*a).* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\ x}{e^{3x}}$;

*b).* $\lim_{x \to 0^+} (1 - \cos x) \ln\ x$.

**Problema 4** *Encontre o ponto da curva* $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$, *que está mais próximo da origem.*

**Problema 5** *Calcule*

*a).* $\int \left( \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx$;

*b).* $\int_{-1}^{0} x(x+1)^{100} dx$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2009**
**Data: Terça-feira, 08 de Dezembro** **Turma 11**

---

**Exercício 1** *O estudo de crescimento da função*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

*é obtido através do estudo de sinal de sua derivada. Assim, iniciamos calculando sua derivada. Usando a regra do produto temos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

*Como* $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *o estudo de sinal da função* $f'$ *depende apenas da função*

$$g(x) = 1 - \ln x$$

*Calculando as raízes de* $g$, *teremos*

$$\begin{aligned} g(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ 1 - \ln x = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \ln x = 1 \quad &\Leftrightarrow \\ x = e \end{aligned}$$

*e através do gráfico da função* $g$, *podemos deduzir que*

$$g(x) > 0, \text{ para } x < e$$

$$g(x) < 0, \text{ para } x > e$$

*e como a função* $f$ *não esta definida para* $x < 0$, *segue-se que*

$$f \text{ é crescente, para } 0 < x < e$$

$$f \text{ é decrescente para } x > e$$

■

**Exercício 2** *O estudo de concavidade da função*

$$f(x) = x \ln x$$

*é dado através do estudo de sinal da função* $f''$. *Calculando-a, teremos*

$$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$$

*Observe que,*

$$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

*Como* $x < 0$ *não pertence ao domínio da função* $f$ *podemos afirmar que*

$$f \text{ terá concavidade para cima quando } x > 0$$

*e como não há encontro de concavidades diferentes, não há também pontos de inflexão.* ■

**Exercício 3**

*a). Precisamos calcular o limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$$

*Observe que*

$$x \to +\infty \Rightarrow \ln x \to +\infty \text{ e } e^{3x} \to +\infty$$

*Logo, usando a regra de L'Hospital teremos*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3e^{3x}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3xe^{3x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

*b). Precisamos calcular o limite*

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \cos x) \ln x$$

*Para isto, observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{1-\cos x}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\dfrac{\text{sen }x}{(1-\cos x)^2}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^2}{x\text{sen }x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2(1-\cos x)\text{sen }x}{\text{sen }x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2(\text{sen}^2 x+\cos x-\cos^2 x)}{2\cos x - x\text{sen }x}\\ &= \frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Um ponto sobre a curva* $y = \dfrac{2}{x}$ *possui coordenadas* $p = \left(x, \dfrac{2}{x}\right)$ *e a distância deste ponto à origem é dada por*

$$d = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

*Observe que minimizando a função*

$$g(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$$

*minizamos também a função d. Então, calculando os candidatos a extremos da função g, teremos*

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\quad\Leftrightarrow\\ 2x - \frac{8}{x^3} = 0 &\quad\Leftrightarrow\\ 2x = \frac{8}{x^3} &\quad\Leftrightarrow\\ 2x^4 = 8 &\quad\Leftrightarrow\\ x = \sqrt[4]{4} &\end{aligned}$$

*Assim,* $x = \sqrt[4]{4}$ *é o único candidato a extremo da função g. Observe que*

$$g''(x) = 2 + \frac{24}{x^4}$$

*e*

$$g''(\sqrt[4]{4}) = 2 + \frac{24}{4} = 8 > 0$$

*E isto nos permite afirmar que* $x = \sqrt[4]{4}$ *é um ponto de mínimo da função g e com isto segue que o ponto procurado é*

$$p = \left(\sqrt[4]{4}, \frac{2}{\sqrt[4]{4}}\right)$$

■

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx &= \int\left(2\frac{1}{x} + 3x^{-2}\right)dx\\ &= 2\ln|x| - \frac{3}{x} + k\end{aligned}$$

*onde* $k \in \mathbb{R}$

*b). Tome*

$$y = x + 1$$

*e observe que*

$$dy = dx$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

*Portanto*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} x(x+1)^{100}dx &= \int_0^1 (y-1)y^{100}dy\\ &= \int_0^1 \left(y^{101} - y^{100}\right)dy\\ &= \left.\frac{y^{102}}{102} - \frac{y^{101}}{101}\right|_0^1\\ &= \frac{1}{102} - \frac{1}{101}\\ &= \frac{-1}{10302}\end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{a}$ Prova** | **2$^{o}$ Semestre** | **2009**

**Data: 16 de Setembro** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

*a).* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1 - x}$;

*b).* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^6 - 1}}$.

**Problema 2** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + ax} - x$$

**Problema 3** *Determine o valor da constante $k$, de modo que a função*

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 2 \\ 2x + k, & x > 2 \end{cases}$$

*seja contínua em todo o conjunto $\mathbb{R}$. Justifique sua resposta.*

**Problema 4** *Calcule os limites*

*a).* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^x}$;

*b).* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\,(1 + 5x)}{x}$.

**Problema 5** *Calcule os limites*

*a).* $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\pi - x}{\text{sen}\ x}$;

*b).* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos\ x - \text{sen}\ x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** — **2009**
**Data: Quinta-feira, 17 de Setembro** — **Turma C1**

---

**Exercício 1**

**a).**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\square$

**b).**

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^6-1}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{x^6(5-\frac{1}{x^6})}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{x^2\sqrt[3]{5-\frac{1}{x^6}}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{5-\frac{1}{x^6}}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt[3]{5}}$$

$\blacksquare$

**Exercício 2**

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+ax}-x =$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)\frac{(\sqrt{x^2+ax}+x)}{(\sqrt{x^2+ax}+x)} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2(1+\frac{a}{x})}+x} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{x\sqrt{1+\frac{a}{x}}+x} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} =$$

$$\frac{a}{2}$$

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Sabemos que*

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \le 2 \\ 2x+k, & x > 2 \end{cases}$$

*Observe porém que, quando $x < 2$ temos*

$$f(x) = kx^2$$

*ou seja, $f$ é uma função polinomial para $x < 2$ e isto nos permite afirmar que a mesma é contínua para qualquer $x < 2$. Pensando do mesmo modo, quando $x > 2$ teremos*

$$f(x) = 2x + k,$$

*que também é polinomial para $x > 2$ e da mesma forma, contínua para todo $x > 2$. Assim, para que a função $f$ seja continua para todo o conjunto $\mathbb{R}$, falta apenas que a mesma seja contínua em $x = 2$. Para que isto seja verdade devemos verificar três propriedades, que são*

**i).** *Devemos verificar que $f(2)$ existe. Pela definição da função temos que $f(2) = 4k$, o que prova que $f(2)$ existe.*

**ii).** *Devemos verificar também que*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

*Para isto, devemos ter*

$$\lim_{x\to 2^+} 2x+k = \lim_{x\to 2^-} kx^2 \Leftrightarrow 4+k = 4k \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

**iii).** *As propriedades (i) e (ii) devem ser iguais, ou seja*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

*Assim, as três propriedades são satisfeitas se* $k = \frac{4}{3}$. ■

**Exercício 4**

**a).**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^x}{x^x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\\ &= e\end{aligned}$$

□

**b).**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+5x)\\ &= \lim_{x\to 0}\ln(1+5x)^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

*Tome* $y = \frac{1}{5x}$ *e observe que que*

$$x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty$$

*e*

$$x\to 0^- \Rightarrow y\to-\infty$$

*Assim, temos que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+5x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\ln(1+5x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\ln(1+\tfrac{1}{y})^{5y}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\ln\left[(1+\tfrac{1}{y})^y\right]^5\\ &= \ln e^5 = 5\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+5x)}{x} &= \lim_{x\to 0^-}\ln(1+5x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{y\to-\infty}\ln(1+\tfrac{1}{y})^{5y}\\ &= \lim_{y\to-\infty}\ln\left[(1+\tfrac{1}{y})^y\right]^5\\ &= \ln e^5 = 5\end{aligned}$$

*Ou seja,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x} = 5$$

■

**Exercício 5**

**a).** *Tome* $y = x-\pi$ *e observe que que*

$$x\to\pi \Rightarrow y\to 0$$

*Assim, temos que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\text{sen }x} &= \lim_{y\to 0}\frac{-y}{\text{sen }(y+\pi)}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-y}{\text{sen }y\cos\pi+\text{sen }\pi\cos y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\text{sen }y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\text{sen }y}{y}}\\ &= 1\end{aligned}$$

□

**b).** *Tome* $y = x-\frac{\pi}{4}$ *e observe que que*

$$x\to\frac{\pi}{4} \Rightarrow y\to 0$$

*Assim, temos que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\text{sen }x}{x-\frac{\pi}{4}} &= \lim_{y\to 0}\frac{\cos(y+\frac{\pi}{4})-\text{sen }(y+\frac{\pi}{4})}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y-2\text{sen }y-\cos y)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-2\text{sen }y)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-\sqrt{2}\text{sen }y}{y}\\ &= -\sqrt{2}\end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2$^{\text{a}}$ Prova** **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2009**

**Data: 11 de Novembro** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada:*

*a).* $y = e^{t^2} \operatorname{sen} 3t$;

*b).* $g(x) = \dfrac{e^{\sec\sqrt{x}}}{x}$.

**Problema 2** *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável até a 2ª ordem e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma outra função dada por* $g(x) = f(e^{2x})$*. Calcule* $g''(x)$*.*

**Problema 3** *A função diferenciável* $y = f(x)$ *é dada implicitamente pela equação*

$$xy^3 + 2xy^2 + x = 4$$

*Sabendo-se que* $f(1) = 1$*, calcule* $f'(1)$*.*

**Problema 4** *Determine o valor de* $\beta$ *para que a reta* $y = \beta x - 2$ *seja tangente ao gráfico da função*

$$f(x) = x^3 - 4x$$

**Problema 5** *Os lados* $x$ *e* $y$ *de um retângulo estão variando a taxas constantes de 0,2m/s e 0,1m/s, respectivamente. A que taxa estará variando a área do retângulo no instante em que* $x = 1m$ *e* $y = 2m$ *?*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2009**
**Data: Quinta-feira, 19 de Novembro** **Turma C1**

---

### Exercício 1

**a).** *Considere a função*

$$h(t) = e^{t^2}$$

*Tome*

$$u(t) = e^t$$

$$v(t) = t^2$$

*e observe que*

$$u'(t) = e^t$$

$$v'(t) = 2t$$

*e*

$$h(t) = u(v(t))$$

*Donde, usando a regra da cadeia, teremos que*

$$\begin{aligned} h'(t) &= u'(v(t))v'(t) \\ &= e^{t^2}(2t) \\ &= 2te^{t^2} \end{aligned}$$

*Procedendo do mesmo modo, considere a função*

$$g(t) = \operatorname{sen} 3t$$

*e tome*

$$r(t) = \operatorname{sen} t$$

$$s(t) = 3t$$

*e observe que*

$$r'(t) = \cos t$$

$$s'(t) = 3$$

*e*

$$g(t) = r(s(t))$$

*e, novamente usando a egra da cadeia teremos que*

$$\begin{aligned} g'(t) &= r'(s(t))s'(t) \\ &= 3\cos 3t \end{aligned}$$

*Por fim, perceba que*

$$y(t) = h(t)g(t)$$

*e, usando a regra do produto, teremos*

$$\begin{aligned} y'(t) &= h'(t)g(t) + h(t)g'(t) \\ &= 2te^{t^2}\operatorname{sen} 3t + 3e^{t^2}\cos 3t \\ &= e^{t^2}\left(2t\operatorname{sen} 3t + 3\cos 3t\right) \end{aligned}$$

□

**b).** *Considere a função*

$$p(x) = \sec\sqrt{x}$$

*Tome*

$$u(x) = \sec x$$

$$v(t) = \sqrt{x}$$

*e observe que*

$$u'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*e*

$$p(x) = u(v(x))$$

*Donde, usando a regra da cadeia, teremos que*

$$\begin{aligned} p'(x) &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{\sec\sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

*Considere agora a função*

$$q(x) = e^{p(x)}$$

*e tome*

$$v(x) = e^x$$

*observe que*

$$v'(x) = e^x$$

*e*

$$q(x) = v(p(x))$$

*Donde, usando a regra da cadeia mais uma vez, teremos que*

$$\begin{aligned} q'(x) &= v'(p(x))p'(x) \\ &= e^{p(x)}p'(x) \\ &= e^{\sec\sqrt{x}}\frac{\sec\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

*Por fim, observe que*

$$g(x) = \frac{e^{\sec\sqrt{x}}}{x} = \frac{q(x)}{x}$$

*e, usando a regra do quociente, teremos que*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{q'(x)x - q(x)}{x^2} \\ &= \frac{e^{\sec\sqrt{x}}\frac{\sec\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}x - e^{\sec\sqrt{x}}}{x^2} \\ &= e^{\sec\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x} - 2}{2x^2} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Sabemos que*

$$g(x) = f(e^{2x})$$

*Então, se considerarmos*

$$h(x) = e^{2x}$$

*teremos*

$$h'(x) = 2e^{2x}$$

$$h''(x) = 4e^{2x}$$

*e*

$$g(x) = f(h(x))$$

*Logo, usando a regra da cadeia, teremos*

$$g'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

*Considere agora a função*

$$p(x) = f'(h(x))$$

*Usando a regra da cadeia novamente, teremos*

$$p'(x) = f''(h(x))h'(x)$$

*Observe agora que*

$$g'(x) = p(x)h'(x)$$

*e usando a regra de derivação do produto teremos*

$$g''(x) = p'(x)h'(x) + p(x)h''(x)$$

*Assim,*

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(h(x))h'(x)h'(x) + f'(h(x))h''(x) \\ &= f''(h(x))\left[h'(x)\right]^2 + f'(h(x))h''(x) \\ &= f''(e^{2x})\left[2e^{2x}\right]^2 + f'(e^{2x})4e^{2x} \\ &= 4f''(e^{2x})e^{4x} + 4f'(e^{2x})e^{2x} \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** *Sabemos que $y = f(x)$ é dada implicitamente através da equação*

$$xy^3 + 2xy^2 + x = 4$$

*e que*

$$f(1) = 1$$

*Derivando implicitamente a equação dada em relação a $x$, teremos*

$$y^3 + 3xy^2y' + 2y^2 + 4xyy' + 1 = 0$$

*Donde, isolando $y'$ obtemos*

$$y' = \frac{-y^3 - 2y^2 - 1}{3xy^2 + 4xy}$$

*ou seja*

$$f'(x) = \frac{-f(x)^3 - 2f(x)^2 - 1}{3xf(x)^2 + 4xf(x)}$$

*O que implica dizer que*

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{-f(1)^3 - 2f(1)^2 - 1}{3f(1)^2 + 4f(1)} \\ &= \frac{-1-2-1}{3+4} \\ &= -\tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Considere $(p, f(p))$ como sendo o ponto onde a reta $y = \beta x - 2$ tangencia o gráfico da função*

$$f(x) = x^3 - 4x$$

*Como*

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

*o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto $(p, f(p))$ é dado por*

$$m = f'(p) = 3p^2 - 4$$

*Assim, a equação desta reta deve ser*

$$y - f(p) = m(x - p)$$

*ou seja*

$$y = (3p^2 - 4)x - 2p^3$$

*Assim, para que a reta $y = \beta x - 2$ seja tangente ao gráfico da função $f$ no ponto $(p, f(p))$ devemos ter*

$$\begin{cases} \beta = 3p^2 - 4 \\ \\ -2 = -2p^3 \end{cases}$$

*Resolvendo este sistema, encontramos $p = 1$ e $\beta = -1$.* ■

**Exercício 5** *Sabemos que a área $A$ de um retângulo de lados $x$ e $y$ é dada por*

$$A = xy$$

*Como a medida destes lados está variando com o passar do tempo, segue-se que*

$$A(t) = x(t)y(t)$$

*Assim, derivando em relação a $t$ obtemos a taxa de variação da área do retângulo em relação ao tempo, ou seja*

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}y(t) + x(t)\frac{dy}{dt}$$

*Como é informado no enunciado do problema que*

$$\frac{dx}{dt} = 0,2m/s$$

$$\frac{dy}{dt} = 0,1m/s$$

*no instante em que $x = 1m$ e $y = 2m$, segue-se então que neste instante deveremos ter*

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{dx}{dt}y(t) + x(t)\frac{dy}{dt} \\ &= 0,2 \cdot 2 + 0,1 \cdot 1 \\ &= 0,5m^2/s \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**3ª Prova** | **2º Semestre** | **2009**

**Data: 02 de Dezembro** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

**Problema 2** *Faça o estudo de concavidade e determine os pontos de inflexão da função*

$$f(x) = xe^{\dfrac{1}{x}}$$

**Problema 3** *Calcule os limites*

*a).* $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$;

*b).* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1)^{\dfrac{1}{\ln\ x}}$.

**Problema 4** *Determine o retângulo de área máxima e lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse*

$$4x^2 + y^2 = 1$$

**Problema 5** *Calcule*

*a).* $\int \frac{x^2+1}{x} dx$;

*b).* $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^5} dx$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 3$^{a}$ Prova** **2009**
**Data: Terça-feira, 08 de Dezembro** **Turma C1**

---

**Exercício 1** *O estudo de crescimento da função*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

*é obtido através do estudo de sinal de sua derivada. Assim, iniciamos calculando sua derivada:*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

*Como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue-se que $f'(x) < 0$ para qualquer $x \neq 0$ e, em conseqüência disto temos que $f$ é decrescente em $\mathbb{R} - \{0\}$.* ■

**Exercício 2** *O estudo de concavidade da função*

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

*é dado através do estudo de sinal da função $f''$. Calculando-a, teremos*

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

*Observe que $e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e, o estudo de sinal da função $f''$ depende apenas da função*

$$g(x) = x^3$$

*a qual sabemos que*

$$x < 0 \Rightarrow g(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

*Logo,*

$$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

*e em conseqüência disto segue-se que*

*$f$ terá concavidade para baixo quando $x < 0$*

*$f$ terá concavidade para cima quando $x > 0$*

*Como em $x = 0$ ocorre o encontro de duas concavidades diferentes, somos levados a acreditar que $x = 0$ seja um ponto de inflexão mas, como pode ser visto na definição da função $f$, o ponto $x = 0$ não pertençe ao domínio da mesma. Portanto esta função não possui pontos de inflexão.* ■

**Exercício 3**

*a). Precisamos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$$

*Observe que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

□

*b). Precisamos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 0^+} (1 - \cos x)\ln x$$

*Para isto, observe que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x\to +\infty} e^{\ln(x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{2x^2}{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{4x}{2x}} \\
&= e^2
\end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Seja $(a, b)$ um vértice do retângulo inscrito na elipse*

$$4x^2 + y^2 = 1$$

*Como este ponto pertence também à elipse segue-se que*

$$4a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1 - 4a^2}$$

*Observe que, por simetria os outros três vértices do retângulo são*

$$(a, -b), (-a, b), (-a, -b)$$

*e, a área este retângulo é dada por*

$$A = 2a \times 2b$$

*e disto segue-se que*

$$A(a) = 4a\sqrt{1 - 4a^2}$$

*Para encontrarmos os candidatos a extremos desta função procedemos da seguinte maneira*

$$\begin{aligned} A'(a) = 0 & \quad \Leftrightarrow \\ \tfrac{-32a^2+4}{\sqrt{1-4a^2}} = 0 & \quad \Leftrightarrow \\ -32a^2 + 4 = 0 & \quad \Leftrightarrow \\ 32a^2 = 4 & \quad \Leftrightarrow \\ a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{8}} & \end{aligned}$$

*Assim, os candidatos a extremos da função $A$ são $a = \sqrt{\frac{1}{8}}$ e $a = -\sqrt{\frac{1}{8}}$. Observe que*

$$A''(a) = \frac{16a\left(8a^2 - 3\right)}{(1 - 4a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

*e*

$$A''\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = -32$$

*e*

$$A''\left(-\sqrt{\frac{1}{8}}\right) = 32$$

*Portanto $a = \sqrt{\frac{1}{8}}$ é o ponto de máximo da função $A$ e o retângulo procurado possui vértices*

$$(a, b)(a, -b), (-a, b), (-a, -b)$$

*onde*

$$a = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

*e*

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

■

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned} \int \left(\tfrac{x^2+1}{x}\right) dx &= \int \left(x + \tfrac{1}{x}\right) dx \\ &= \tfrac{x^2}{2} + \ln|x| + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$*

*b). Tome*

$$y = x + 1$$

*e observe que*

$$dy = dx$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

*Portanto*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tfrac{x}{(x+1)^5} dx &= \int_1^2 \tfrac{y-1}{y^5} dy \\ &= \int_1^2 \left(y^{-4} - y^{-5}\right) dy \\ &= -\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{4y^4}\bigg|_1^2 \\ &= -\frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \tfrac{11}{192} \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1ª Prova (Turma 11)** **2º Semestre** **2010**

**Data: 15 de Setembro** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule o limite*

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\frac{3}{t+1}-\frac{5}{t^2-1}\right)$$

**Problema 2** *Calcule os limites*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{5\sqrt{x}}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{sen} 3x}$.

**Problema 3** *Suponha que $f$ e $g$ sejam funções contínuas e tais que $f(2)=1$ e*

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+4g(x)]=13$$

*Encontre*

*a).* $g(2)$;

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x)$.

**Problema 4** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\ln(3x+2)\right]$$

**Problema 5** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 0}\,(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** — **2010**
**Data: Terça-feira, 28 de Setembro** — **Turma 11**

---

**Exercício 1** *Calculando o limite, obtemos*

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\tfrac{3}{t+1}-\tfrac{5}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to -1^+}\left(\tfrac{3}{t+1}-\tfrac{5}{(t+1)(t-1)}\right)$$

$$= \lim_{t\to -1^+}\tfrac{1}{t+1}\left(3-\tfrac{5}{(t-1)}\right)$$

*Observe que*

$$t\to -1^+ \Rightarrow t > -1 \Rightarrow t+1>0$$

*logo,*

$$\frac{1}{t+1}\to +\infty \text{ quando } t\to -1^+$$

*e*

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\tfrac{3}{t+1}-\tfrac{5}{t^2-1}\right) = +\infty\cdot(3+\tfrac{5}{2})$$

$$= +\infty$$

■

**Exercício 2**

*a). Observe que*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{5\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{5\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

*e como $x\to 0^+$, segue-se que $x>0$ e*

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = |x| = x$$

*e disto temos que*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{5\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{\operatorname{sen} x}{5x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{5}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= 0$$

□

*b). Calculando o limite teremos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{\cos 7x\operatorname{sen} 3x}\frac{7x}{7x}\frac{3x}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\frac{1}{\cos 7x}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}\frac{7}{3}$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{7}{3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

■

**Exercício 3**

*a). Como $f$ e $g$ são funções contínuas, segue-se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \forall a\in D_f$$

*e,*

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a), \forall a\in D_g$$

*Tomando $a=2$ e usando a hípotese de que $f(2)=1$ teremos*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$$

*e,*

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$$

*Usando a informação dada, de que*

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+4g(x)] = 13$$

*e as propriedades dos limites, válidas aqui por serem as funções $f$ e $g$ contínuas, teremos então que*

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+4g(x)] = 13 \quad\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) + 4\lim_{x\to 2} g(x) = 13 \quad\Leftrightarrow$$

$$1+4g(2) = 13 \quad\Leftrightarrow$$

$$g(2) = 3$$

□

*b). Como g é uma função contínua, é válido que*

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$$

*e do ítem anterior, segue-se*

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3$$

■

**Exercício 4** *Considere*

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(3x+2)\right]$$

*Calculando L teremos*

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(3x+2)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{3x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{\frac{3x+2}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}} \\
&= \ln\frac{1}{3} \\
&= -\ln 3
\end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Desejamos calcular o limite*

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

*Para isto, considere*

$$y = \frac{1}{2x}$$

*e observe que*

$$x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty$$

*e*

$$x\to 0^- \Rightarrow y\to-\infty$$

*Desta forma, segue-se que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^{2y} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{y})^{y}\right]^2 \\
&= e^2
\end{aligned}$$

*por outro lado, temos que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y\to-\infty}(1+\frac{1}{y})^{2y} \\
&= \lim_{y\to-\infty}\left[(1+\frac{1}{y})^{y}\right]^2 \\
&= e^2
\end{aligned}$$

*Assim, podemos concluir que*

$$\lim_{x\to 0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof°. Edson**

**2ª Prova (Turma 11)** **2° Semestre** **2010**

**Data: 08 de Novembro** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada das funções*

*a).* $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$*;*

*b).* $y = xe^x \cos x$.

**Problema 2** *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, \text{ se } x \leq 1 \\ \\ 5x - 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

*Calcule* $f''(x)$.

**Problema 3** *Considere a função* $\phi(x) = \ln(x^2+1)$. *Calcule*

$$[\phi(\phi(x))]'$$

**Problema 4** *Determine uma reta que seja paralela a* $x + y = 1$ *e que seja tangente à curva* $x^2 + xy + y^2 = 3$.

**Problema 5** *Um ponto move-se sobre a semicircunferência* $x^2 + y^2 = 5$, $y \geq 0$. *Suponha que* $\dfrac{dx}{dt} > 0$. *Determine o ponto da curva em que a velocidade da ordenada seja o dobro da velocidade da abcissa.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2010**
**Data: Terça-feira, 09 de Novembro** **Turma 11**

---

**Exercício 1**

*a). Considere*

$$h(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = 1 + \sqrt{x}$$

*Observe que*

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*e*

$$f(x) = h(g(x))$$

*Assim, usando a regra da cadeia, teremos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x + x\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

$\square$

*b). Considere agora*

$$p(x) = xe^x$$

$$q(x) = \cos x$$

*Usando a regra do produto, temos que*

$$p'(x) = e^x(1+x)$$

*e*

$$q'(x) = -\operatorname{sen} x$$

*Observe que*

$$y(x) = p(x)q(x)$$

*e, usando a regra do produto mais uma vez, teremos*

$$\begin{aligned} y'(x) &= p'(x)q(x) + p(x)q'(x) \\ &= e^x(1+x)\cos x - xe^x \operatorname{sen} x \\ &= e^x\left[(1+x)\cos x - x\operatorname{sen} x\right] \end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Inicialmente, calculemos $f'(x)$. Para isto, observe que*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3, & se\ x < 1 \\ 5, & se\ x > 1 \end{cases}$$

*e, para $x = 1$, tem-se que*

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

*Observe porém, que*

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{5(1+h) - 1 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{5 + 5h - 5}{h} \\ &= 5 \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+3(1+h)-4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + 5h}{h} \\ &= 5 \end{aligned}$$

*Logo,*

$$f'(1) = 5$$

*e*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3, & se\ x \leq 1 \\ 5, & se\ x > 1 \end{cases}$$

*Procedendo da mesma maneira para o cálculo de $f''(x)$, observe que*

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x < 1 \\ 0, & se\ x > 1 \end{cases}$$

*e*

$$f''(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$$

*Porém, perceba que*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{5-5}{h} \\ &= 0\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)+3-5}{h} \\ &= 2\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$f''(1) = \nexists$$

*Portanto,*

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x < 1 \\ \nexists & se\ x = 1 \\ 0, & se\ x > 1 \end{cases}$$

■

**Exercício 3** *Considere*

$$f(x) = \phi(\phi(x))$$

*Usando a regra da cadeia, temos que*

$$f'(x) = \phi'(\phi(x))\phi'(x)$$

*onde*

$$\phi(x) = \ln(x^2+1)$$

*Tome*

$$p(x) = \ln x$$

$$q(x) = x^2 + 1$$

*e observe que*

$$p'(x) = \frac{1}{x}$$

$$q'(x) = 2x$$

*e que*

$$\phi(x) = p(q(x))$$

*Assim, usando a regra da cadeia mais uma vez, obtemos*

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= p'(q(x))q'(x) \\ &= \frac{2x}{x^2+1}\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2\ln(x^2+1)}{\left[\ln^2(x^2+1)+1\right]} \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{4x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)\left[1+\ln^2(x^2+1)\right]}\end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *A reta $x + y = 1$ possui coeficiente angular $m = -1$. Assim, devemos encontrar o ponto $(x_0, y_0)$ sobre a curva*

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

*cuja reta tangente possua coeficiente angular $m$. Derivando implicitamente, em relação à variável $x$, a equação da curva dada, obtemos*

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$

*donde, isolando o $y'$ teremos*

$$y'(x) = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

*Portanto, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da curva, no ponto $(x_0, y_0)$ é dado por*

$$y'(x_0) = \frac{-2x_0 - y_0}{x_0 + 2y_0}$$

*onde*

$$x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = 3 \tag{1}$$

*Assim, como queremos a reta tangente que é paralela à reta $x + y = 1$, segue-se que*

$$m = y'(x_0)$$

*ou seja,*

$$\frac{-2x_0 - y_0}{x_0 + 2y_0} = -1 \Leftrightarrow x_0 = y_0$$

*Substituido este resultado na equação (**??**) teremos então que*

$$3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

*e disto segue-se que*

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$$

*e os pontos que a reta procurada tangencia o gráfico da curva dada são*

$$(1,1)\ e\ (-1,-1)$$

*Com isto, as retas que passam por estes pontos e possuem coeficiente angular -1 são*

$$y = -x + 2$$

$$y = -x - 2$$

■

**Exercício 5** *Queremos encontrar o ponto* $(x_0, y_0)$ *da curva*

$$x^2 + y^2 = 5, \; y \geq 0$$

*para o qual*

$$\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

*Derivando a equação da curva em relação à variável* $t$*, teremos*

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

*e, usando (*??*), segue-se*

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\left(2\frac{dx}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\frac{dx}{dt}(x + 2y) = 0$$

*Como* $\frac{dx}{dt} > 0$*, a equação anterior será verdadeira somente se*

$$x + 2y = 0$$

*no ponto* $(x_0, y_0)$*, ou seja, se*

$$x_0 + 2y_0 = 0$$

*e, como este ponto pertence à curva, temos também que*

$$x_0^2 + y_0^2 = 5$$

*Usando estes dois resultados, teremos então, que*

$$(-2y_0)^2 + y_0^2 = 5 \Leftrightarrow y_0 = \pm 1$$

*mas, devemos ter* $y_0 \geq 0$ *e disto segue-se que*

$$y_0 = 1$$

*e*

$$x_0 = -2$$

*e, o ponto procurado é* $(-2, 1)$*.* ■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**3$^{a}$ Prova (Turma 11)** **2$^{o}$ Semestre** **2010**

**Data: 01 de Dezembro** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Faça o estudo de crescimento da função*

$$f(x) = (x+1)^2 x^{\frac{1}{3}}$$

**Problema 2** *Faça o estudo da função*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$$

*com relação à concavidade e pontos de inflexão.*

**Problema 3** *Calcule os limites*

*a).* $\lim_{x \to 1} \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$;

*b).* $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3}$.

**Problema 4** *Uma caixa com base quadrada e sem tampa é feita de* $400cm^2$ *de papelão. Determine as dimensões da caixa de tal modo que seu volume seja máximo.*

**Problema 5** *Calcule as integrais*

*a).* $\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{\sqrt[3]{x}} dx$;

*b).* $\int x\sqrt{4x^2 + 5}\,dx$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2010**
**Data: Sábado, 04 de Dezembro** **Turma 11**

---

**Exercício 1** *Considere*

$$f(x) = (x+1)^2 x^{\frac{1}{3}}$$

*Observe que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)x^{\frac{1}{3}} + (x+1)^2 \tfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2(x+1)\sqrt[3]{x} + (x+1)^2 \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{6x(x+1) + (x+1)^2}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{(x+1)(7x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

*Como* $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *segue-se que*

$$3\sqrt[3]{x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

*Logo, o estudo de sinal da função* $f'$ *pode ser obtido através do estudo de sinal do seu numerador, ou seja, através da função*

$$g(x) = (x+1)(7x+1)$$

*Esta função possui raízes*

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -\frac{1}{7}$$

*e, realizando o estudo de sinal de* $g$, *teremos que*

*g(x)>0 para* $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{7}, +\infty)$

*g(x)<0 para* $x \in (-1, -\frac{1}{7})$

*Ou seja,*

*f'(x)>0 para* $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{7}, +\infty)$

*f'(x)<0 para* $x \in (-1, -\frac{1}{7})$

*Donde podemos concluir que*

*f é crescente para* $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{7}, +\infty)$

*f é descrescente para* $x \in (-1, -\frac{1}{7})$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Considere a função*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$$

*Observe que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2-2) - x^2(2x)}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 2 - x^2)}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2-2)^2} \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2-2)^2 + 16x^2(x^2-2)}{(x^2-2)^4} \\ &= \frac{(x^2-2)[-4(x^2-2) + 16x^2]}{(x^2-2)^4} \\ &= \frac{4(x^2-2)(3x^2+2)}{(x^2-2)^4} \end{aligned}$$

*Como*

$$\frac{4(3x^2+2)}{(x^2-2)^4} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

*o estudo de sinal da função* $f''$ *pode ser obtido através do estudo de sinal da função*

$$g(x) = x^2 - 2$$

*donde segue-se que*

*g(x)>0 para* $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

*g(x)<0 para* $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

*Portanto*

*f"(x)>0 para* $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

*f"(x)<0 para* $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

*e disto segue-se que*

- *f possui concavidade voltada para cima quando* $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- *f possui concavidade voltada para baixo quando* $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

*Além disso, como* $\pm\sqrt{2} \notin D_f$*, a função* $f$ *não possui pontos de inflexão.* ■

**Exercício 3**

*a).*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^5-1} = \lim_{x\to 1}\frac{9x^8}{5x^4} = \frac{9}{5}$$

*b).*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^3} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{3x}}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{9e^{3x}}{6x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{27e^{3x}}{6}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Suponhamos que a base quadrada da caixa que desejamos construir tenha lado* $l$ *e a altura seja* $h$*. Desta forma a área da superfície desta caixa é:*

$$A(l,h) = l^2 + 4hl$$

*e como é suposto no problema que o papelão utilizado para construir esta caixa é de* $400cm^2$ *segue-se que*

$$l^2 + 4hl = 400 \qquad (1)$$

*O volume desta caixa é dado por*

$$V(l,h) = hl^2$$

*e, usando a equação (1) teremos que*

$$V(l) = \frac{400l - l^3}{4}$$

*Assim, a resolução deste problema resume-se a encontrar o ponto de máximo da função* $V$ *e para isto devemos encontrar seus candidatos a extremos os quais podem ser obtidos através da seguinte equação*

$$V'(l) = 0$$

*ou seja*

$$\frac{400-3l^2}{4} = 0$$

*donde, obtemos que*

$$l = \pm\sqrt{\frac{400}{3}}$$

*mas, como* $l$ *deve ser um número positivo, segue-se que*

$$l = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

*Observe agora que*

$$V''(l) = \frac{-6l}{4} \Rightarrow V''\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{30}{\sqrt{3}} < 0$$

*e disto concluimos que* $l = \frac{20}{\sqrt{3}}$ *é um ponto de máximo da função* $V$*.*

*Voltando à equação (1) teremos também que*

$$h = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

*Assim a caixa que queremos construir deverá ter dimensões*

$$l = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

■

**Exercício 5**

*a).*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3+2x^2-3}{\sqrt[3]{x}}dx &= \int_0^1 \frac{x^3+2x^2-3}{x^{\frac{1}{3}}}dx\\ &= \int_0^1\left(\frac{x^3}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{2x^2}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx\\ &= \int_0^1\left(x^{\frac{8}{3}}+2x^{\frac{5}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}\right)dx\\ &= \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1\\ &= -\frac{306}{88}\end{aligned}$$

□

*b). Queremos calcular a integral*

$$\int x\sqrt{4x^2+5}dx$$

*Para isto tome*

$$y = 4x^2+5$$

*e observe que*

$$dy = 8xdx$$

*Logo*

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{4x^2+5}dx &= \frac{1}{8}\int \sqrt{y}dy \\ &= \frac{1}{12}y^{\frac{3}{2}} + k \\ &= \tfrac{1}{12}\sqrt{y^3} + k \\ &= \tfrac{1}{12}\sqrt{(4x^2+5)} + k\end{aligned}$$

*onde* $k \in \mathbb{R}$. ■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**Prova Final (Turma 11)** **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2010**

**Data: 08 de Dezembro** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Encontre os limites*

*a).* $\lim_{x\to\pi^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$;

*b).* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$.

**Problema 2** *Considere*

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

*Calcule* $f''(x)$.

**Problema 3** *Encontre um ponto sobre o gráfico da função* $y = e^{3x}$ *no qual a reta tangente passa pela origem.*

**Problema 4** *A janela de uma igreja consiste de um retângulo com um semicírculo em cima e deve ter um perímetro* $p$. *Encontre o raio do semicírculo para que a área da janela seja máxima.*

**Problema 5** *Calcule as integrais*

*a).* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$;

*b).* $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2010**
**Data: Quinta-feira, 09 de Dezembro** **Turma 11**

---

**Exercício 1**

*a).*

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{1}=-1$$

*b). Considere*

$$A=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

*Temos que*

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\\
&= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Considere*

$$f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$$

*Observe que*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2(1+x^2)-x^3(2x)}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

*e, derivando mais uma vez, teremos*

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(6x+4x^3)(1+x^2)^2-x^2(3+x^2)[4x(1+x^2)]}{(1+x^2)^4}\\
&= \frac{2x(3+2x^2)(1+x^2)^2-4x^3(3+x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\\
&= \frac{2x(3+2x^2)(1+x^2)-4x^3(3+x^2)}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{2x(3+3x^2+2x^2+2x^4)-12x^3-4x^5}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{6x+10x^3+4x^5-12x^3-4x^5}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3}\\
&= \frac{-2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

■

**Exercício 3** *Seja $(x_0,y_0)$ o ponto sobre o gráfico da função $y=e^{3x}$ no qual a reta tangente passa pela origem. A inclinação desta reta é data por*

$$m=\frac{dy}{dx}(x_0)$$

*onde*

$$\frac{dy}{dx}=3e^{3x}$$

*ou seja,*

$$m=3e^{3x_0}$$

*e, como $(x_0, y_0)$ pertençe ao gráfico de $f$, temos também que*

$$y_0 = e^{3x_0}$$

*Portanto a equação da reta que procuramos, em função de $x_0$ e $y_0$ é dada por*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

*ou seja*

$$y = 3e^{3x_0}x + e^{3x_0}(1 - 3x_0)$$

*Como esta reta deve para pela origem, segue-se que*

$$0 = e^{3x_0}(1 - 3x_0) \Rightarrow 1 - 3x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$$

*e a o ponto que procuramos é*

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, e\right)$$

■

**Exercício 4** *Seja $r$ o raio do semicírculo sobre a janela, como o diâmetro deste círculo coincide com a largura da janela, segue que a base da janela será $2r$. Supondo que a altura do retângulo que compõe a janela seja $h$, o perímetro $p$ desta será então*

$$2h + 2r + \pi r = p \qquad (1)$$

*e, a área é dada por*

$$A = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$$

*Usando a equação (1) temos que*

$$2h = p - (2 + \pi)r$$

*donde segue-se que*

$$\begin{aligned} A(r) &= r[p - (2 + \pi)r] + \tfrac{1}{2}\pi r^2 \\ &= rp - (2 + \tfrac{1}{2}\pi)r^2 \end{aligned}$$

*Desta forma, nossoproblema resume-se a encontrar um ponto de máximo para a função $A$. Para isto devemos resolver a seguinte equação*

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow p - 2(2 + \frac{1}{2}\pi)r = 0$$

*donde, resolvendo, teremos*

$$r = \frac{p}{4 + \pi}$$

*Observe que*

$$A''(r) = -2(2 + \frac{1}{2}\pi) < 0$$

*o que demonstra que o valor encontrado é realmente um ponto de máximo para a função $A$.* ■

**Exercício 5**

*a). Queremos calcular a integral*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{sen}\sqrt{x}\,dx$$

*Para isto tome*

$$y = \sqrt{x}$$

*e observe que*

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2dy = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

*Logo*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{sen}\sqrt{x}\,dx &= \int 2\,\mathrm{sen}\, y\,dy \\ &= -2\cos y + k \\ &= -2\cos(\sqrt{x}) + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* □

*b). Procedendo do mesmo, considere a integral*

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

*Tome*

$$y = \ln x$$

*e observe que*

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

*Logo*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{dy}{y} \\ &= \ln|y| + k \\ &= \ln|\ln x| + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* ■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1ª Prova (Turma C1)** **2º Semestre** **2010**

**Data: 15 de Setembro** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}-x^{100}}$$

**Problema 2** *Calcule os limites*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$;

*b).* $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h - 1}$.

**Problema 3** *Determine o valor da constante $k$, de modo que a função*

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, \ x \le 2 \\ 2x+k, \ x > 2 \end{cases}$$

*seja contínua em todo o conjunto $\mathbb{R}$. Justifique sua resposta!*

**Problema 4** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\ln(x^3+2x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right]$$

**Problema 5** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 0} (1+2x)^x$$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2010**
**Data: Terça-feira, 28 de Setembro** **Turma C1**

---

**Exercício 1** *Calculando o limite, teremos*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}-x^{100}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{99}(x+1)}{x^{100}(x-1)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{x+1}{x-1}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\\
&= 0\cdot 1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

**Exercício 2**

*a).*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{x}\frac{x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0} x\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\\
&= 0\cdot 1
\end{aligned}
$$

□

*b). Considere*

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1}$$

*Calculando $L$ teremos*

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h-1}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h}\frac{1+\cos 3h}{1+\cos 3h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 3h}{-\operatorname{sen}^2 5h(1+\cos 3h)}\frac{\frac{1}{9h^2}}{\frac{1}{9h^2}}\frac{\frac{1}{25h^2}}{\frac{1}{25h^2}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 3h}{9h^2}}{-\frac{\operatorname{sen}^2 5h}{25h^2}(1+\cos 3h)}\frac{9}{25}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\operatorname{sen} 3h}{3h}\right)^2}{-\left(\frac{\operatorname{sen} 5h}{5h}\right)^2(1+\cos 3h)}\frac{9}{25}\\
&= -\frac{9}{50}
\end{aligned}
$$

■

***Exercício 3*** *Sabemos que*

$$
f(x)=\begin{cases} kx^2, & x\le 2\\ 2x+k, & x>2\end{cases}
$$

*Observe porém que, quando $x<2$ temos*

$$f(x)=kx^2$$

*ou seja, $f$ é uma função polinomial para $x<2$ e isto nos permite afirmar que a mesma é contínua para qualquer $x<2$. Pensando do mesmo modo, quando $x>2$ temos*

$$f(x)=2x+k,$$

*que também é polinomial para $x>2$ e da mesma forma, contínua para todo $x>2$. Assim, para que a função $f$ seja continua para todo o conjunto $\mathbb{R}$, falta apenas que a mesma seja contínua em $x=2$. Para que isto seja verdade devemos verificar três propriedades, que são*

**i).** *Devemos verificar que $f(2)$ existe. Pela definição da função temos que $f(2) = 4k$, o que prova que $f(2)$ existe.*

**ii).** *Devemos verificar também que*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

*Para isto, devemos ter*

$$\lim_{x\to 2^+}(2x+k) = \lim_{x\to 2^-} kx^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$4+k = 4k$$

*ou seja, para que esta propriedade seja válida devemos ter $k = \dfrac{4}{3}$ e*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{16}{3}$$

**iii).** *Por fim, devemos ter também que*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

*ou seja*

$$\frac{16}{3} = 4k \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

*Assim, as três propriedades são satisfeitas se* $k = \dfrac{4}{3}$. ■

***Exercício 4*** *Considere*

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\ln(x^3+2x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right]$$

*Calculando $L$ teremos*

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\left[\tfrac{1}{3}\ln(x^3+2x-1) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{(x^3+2x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt[2]{x^2+x+1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt[2]{x^2+x+1}}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[2]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \ln 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

***Exercício 5***

$$\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^x = 1^0 = 1$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2ª Prova (Turma C1)** **2º Semestre** **2010**

**Data: 08 de Novembro** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada das funções*

*a).* $y = \dfrac{t^3}{(t^2+1)^2}$;

*b).* $y = x^2 \cos x(1 + \ln x)$.

**Problema 2** *Considere a função*

$$f(x) = x\,|x|$$

*Calcule* $f''(x)$.

**Problema 3** *Considere a função* $\phi(x) = e^{x^2}$. *Calcule*

$$[\phi(\phi(x))]'$$

**Problema 4** *Determine uma reta que seja tangente à elipse* $x^2 + 2y^2 = 9$ *e que intercepta o eixo* $y$ *no ponto de ordenada* $\dfrac{9}{4}$.

**Problema 5** *Um balão esférico é esvaziado de tal forma que seu raio decresce a uma taxa constante de* $15cm/min$. *Com que taxa o ar estará sendo removido quando o raio for de* $9cm$ *?*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 2$^{a}$ Prova** **2010**
**Data: Terça-feira, 09 de Novembro** **Turma C1**

---

**Exercício 1**

*a). Desejamos derivar a função*

$$y(t) = \frac{t^3}{(t^2+1)^2}$$

*Para isto usaremos a regra do quociente, ouseja*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{(t^3)'(t^2+1)^2 - t^3\left[(t^2+1)^2\right]'}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{3t^2(t^2+1)^2 - 2t^3(t^2+1)(2t)}{(t^2+1)^4} \\ &= \frac{3t^2(t^2+1)^2 - 4t^4(t^2+1)}{(t^2+1)^4} \\ &= \frac{t^2(3-t^2)}{(t^2+1)^3} \end{aligned}$$

□

*b). Considere*

$$p(x) = x^2 \cos x$$

$$q(x) = 1 + \ln x$$

*Usando a regra do produto, temos que*

$$p'(x) = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x$$

*e*

$$q'(x) = \frac{1}{x}$$

*Observe que*

$$y(x) = p(x)q(x)$$

*e, usando a regra do produto mais uma vez, teremos*

$$\begin{aligned} y'(x) &= p'(x)q(x) + p(x)q'(x) \\ &= (2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x)(1+\ln x) + \frac{x^2\cos x}{x} \\ &= (2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x)(1+\ln x) + x\cos x \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Observe que*

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x^2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

*Inicialmente, calculemos $f'(x)$. Para isto, note que*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x > 0 \\ -2x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

*e, para $x = 0$, tem-se que*

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

*Observe porém, que*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} h \\ &= 0 \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} -h \\ &= 0 \end{aligned}$$

*Logo,*

$$f'(0) = 0$$

*e*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x \geq 0 \\ -2x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

*Procedendo da mesma maneira para o cálculo de $f''(x)$, observe que*

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x > 0 \\ -2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

*e*

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h}$$

*Porém, perceba que*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h-0}{h} = 2$$

*e*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h-0}{h} = -2$$

*ou seja,*

$$f''(0) = \nexists$$

*Portanto,*

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x > 0 \\ \nexists & se\ x = 0 \\ -2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

■

**Exercício 3** *Considere*

$$f(x) = \phi(\phi(x))$$

*Usando a regra da cadeia, temos que*

$$f'(x) = \phi'(\phi(x))\phi'(x)$$

*onde*

$$\phi(x) = e^{x^2}$$

*Tome*

$$p(x) = e^x$$

$$q(x) = x^2$$

*e observe que*

$$p'(x) = e^x$$

$$q'(x) = 2x$$

*e que*

$$\phi(x) = p(q(x))$$

*Assim, usando a regra da cadeia mais uma vez, obtemos*

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= p'(q(x))q'(x) \\ &= 2xe^{x^2} \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\phi(x)e^{\phi^2(x)}\phi'(x) \\ &= 2e^{x^2}e^{e^{2x^2}}\left(2xe^{x^2}\right) \\ &= 4xe^{2x^2}e^{e^{2x^2}} \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Seja $(x_0, y_0)$ o ponto da curva*

$$x^2 + 2y^2 = 9$$

*tangenciado pela reta que desejamos encontrar. Derivando implicitamente a equação desta curva, em relação à $x$, obtemos*

$$2x + 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

*e, no ponto $(x_0, y_0)$ teremos*

$$2x_0 + 4y_0\frac{dy}{dx}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{-x_0}{2y_0}$$

*Assim, o coeficiente angular da reta que procuramos é dado por*

$$m = \frac{-x_0}{2y_0}$$

*e como este ponto pertence à curva, segue-se que*

$$x_0^2 + 2y_0^2 = 9 \tag{1}$$

*A equação da reta, em função de $x_0$ e $y_0$ é dada por*

$$\begin{aligned} y - y_0 = m(x - x_0) &\quad \Leftrightarrow \\ y - y_0 = \frac{-x_0}{2y_0}(x - x_0) &\quad \Leftrightarrow \\ 2y_0(y - y_0) = -x_0(x - x_0) &\quad \Leftrightarrow \\ 2y_0y - 2y_0^2 = -x_0x + x_0^2 &\quad \Leftrightarrow \\ 2y_0y = -x_0x + 2y_0^2 + x_0^2 & \end{aligned}$$

*Usando (1), segue-se que*

$$2y_0y = -x_0x + 9 \tag{2}$$

*Como esta reta deve passar pelo ponto $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ devemos ter também que*

$$2y_0\frac{9}{4} = 9 \Leftrightarrow y_0 = 2$$

*Voltando à equação (1) encontraremos*

$$x_0^2 + 8 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

*Assim, substituindo os valores encontrados (2), encontramos duas soluções para o problema:*

$$4y = -x + 9 \Leftrightarrow y = \frac{-x+9}{4}$$

$$4y = x + 9 \Leftrightarrow y = \frac{x+9}{4}$$

■

**Exercício 5** *Seja $r$ o raio do balão. Do enunciado do problema é dado que*

$$\frac{dr}{dt} = -15cm/min$$

*e o volume de ar contido neste balão é*

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

*Assim, derivando ambos lados desta equação, em relação a $t$, encontramos*

$$\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r^2(t)\frac{dr}{dt}$$

*e, no instante em que o $r = 9cm$ teremos portanto,*

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 4\pi(81)(-15)\, cm^3/min \\ &= -4860\pi\, cm^3/min\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**Prova Final (Turma C1)** **2$^{o}$ Semestre** **2010**

**Data: 08 de Dezembro** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Encontre os limites*

*a).* $\lim_{x\to\pi^-}(x-\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$;

*b).* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 3x}{x^2}\right)$.

**Problema 2** *Considere*

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2}$$

*Calcule* $f''(x)$.

**Problema 3** *Determine o(s) ponto(s) da curva* $y^2=2x^3$ *cuja reta tangente é perpendicular à reta* $4x-3y+1=0$.

**Problema 4** *Um retângulo tem dois cantos inferiores no eixo* $x$ *e dois cantos superiores na curva* $y=16-x^2$. *Dentre todos esses retângulos, quais as dimensões daquele que tem maior área.*

**Problema 5** *Calcule as integrais*

*a).* $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$;

*b).* $\int x^2 e^{-2x^3} dx$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2010**
**Data: Quinta-feira, 09 de Dezembro** **Turma C1**

---

**Exercício 1**

*a). Considere*

$$A = \lim_{x\to\pi^-}(x-\pi)\text{tg}(\frac{x}{2})$$

*e observe que*

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\pi^-}\frac{(x-\pi)\text{sen}(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x\to\pi^-}\frac{\text{sen}(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}(x-\pi)\cos(\frac{x}{2})}{-\frac{1}{2}\text{sen}(\frac{x}{2})} \\ &= -2 \end{aligned}$$

□

*b).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 3x}{x^2}\right) &= \lim_{x\to +0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to +0}\frac{3\text{sen}\,3x}{2x} \\ &= \lim_{x\to +0}\frac{9\cos 3x}{2} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Considere*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-2}$$

*Observe que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2-2)-x^2(2x)}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{2x^3-4x-2x^3}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2-2)^2} \end{aligned}$$

*e, derivando mais uma vez, teremos*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2-2)^2+4x[2(x^2-2)(2x)]}{(x^2-2)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-2)^2+16x^2(x^2-2)}{(x^2-2)^4} \\ &= \frac{-4(x^2-2)(x^2-2-4x^2)}{(x^2-2)^4} \\ &= \frac{4(3x^2+2)}{(x^2-2)^3} \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** *Seja $(x_0, y_0)$ o ponto sobre a curva $y^2 = 2x^3$ cuja reta é perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$. Derivando implicitamente, em relação a $x$, a equação da curva dada, teremos*

$$2y\frac{dy}{dx} = 6x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y}$$

*de modo que, no ponto $(x_0, y_0)$ teremos a inclinação da reta mencionada no problema, ou seja*

$$m_1 = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = \frac{3x_0^2}{y_0}$$

*e, como $(x_0, y_0)$ pertence ao gráfico de $f$, temos também que*

$$y_0^2 = 2x_0^3$$

*Assim, a equação desta reta, em função de $x_0$ e $y_0$ é dada por*

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

*ou seja*

$$\begin{aligned} y - y_0 = \frac{3x_0^2}{y_0}(x-x_0) \quad &\Leftrightarrow \\ yy_0 - y_0^2 = 3x_0^2(x-x_0) \quad &\Leftrightarrow \\ y = \frac{3x_0^2}{y_0}x - \frac{x_0^3}{y_0} \end{aligned}$$

*Como esta reta deve ser perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$ que possui coeficiente angular*

$$m_2 = \frac{4}{3}$$

*pela condição de perpendicularidade entre duas retas, teremos então que*

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{3x_0^2}{y_0}\frac{4}{3} = -1 \Leftrightarrow y_0 = -4x_0^2$$

*e a equação da reta procurada é*

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{x_0}{4}$$

*Observe que esta reta também deve passar pelo ponto $(x_0, y_0)$ e disto segue-se que*

$$\begin{aligned} y_0 = -\frac{3}{4}x_0 + \frac{x_0}{4} \quad &\Leftrightarrow \\ -4x_0^2 = -\frac{2x_0}{4} \quad &\Leftrightarrow \\ -8x_0^2 + x_0 = 0 & \\ x_0(1 - 8x_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = \frac{1}{8}$$

*Quando $x_0 = 0$, teremos $y_0 = 0$ e, neste caso $\frac{dy}{dx}(0,0)$ não existe, ou seja a curva não é diferenciável neste ponto. Assim, o ponto que procuramos é $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$.* ■

**Exercício 4** *Seja $(x_0, y_0)$ um dos cantos superiores do retângulo. Por simetria segue-se que $(-x_0, y_0)$ é o outro canto superior e os pontos $(x_0, 0)$ e $(-x_0, 0)$ são os cantos inferiores deste retângulo. Assim, podemos concluir que a base do retângulo é dada por*

$$b = 2x_0$$

*e a altura é*

$$h = y_0 = 16 - x_0^2$$

*Com isto, sua área é dada por*

$$A(x_0) = 2x_0(16 - x_0^2)$$

*e, a solução deste problema resume-se a encontrar um ponto de máximo da função $A$. Isto pode ser feito resolvendo-se a equação*

$$A'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

*Observe que*

$$A''(x_0) = -12x_0 \Rightarrow A''\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{48}{\sqrt{3}} < 0$$

*o que demonstra que o ponto $x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ é realmente um ponto de máximo da função $A$. E, concluindo, as dimensões do retângulo que procuramos são*

$$b = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{32}{3}$$

■

**Exercício 5**

*a). Queremos calcular a integral*

$$\int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$$

*Para isto tome*

$$y = \cos x$$

*e observe que*

$$dy = -\operatorname{sen} x\, dx$$

*Logo*

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx &= -\int y^3 dy \\ &= -\frac{1}{4}y^4 + k \\ &= -\frac{1}{4}\cos^4 x + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* □

*b). Procedendo do mesmo, considere a integral*

$$\int x^2 e^{-2x^3} dx$$

*Tome*

$$y = -2x^3$$

*e observe que*

$$dy = -6x^2 dx \Leftrightarrow x^2 dx = -\frac{1}{6}dy$$

*Logo*

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2x^3} dx &= -\frac{1}{6}\int e^y dy \\ &= -\frac{1}{6}e^y + k \\ &= -\frac{1}{6}e^{-2x^3} + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* ■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma M1**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1ª Prova** **1º Semestre** **2013**

**Data: Quarta-feira, 17 de Julho de 2013** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{6+t} - \sqrt{6}}{t}$;

**b).** $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right]$.

**Problema 2** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{99} + x^{98}}{x^{100} - x^{99}}$;

**b).** $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2x - 3}$.

**Problema 3** *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} kx - 3, \text{ se } x \leq -1 \\ \\ x^2 + 4, \text{ se } x > -1 \end{cases}$$

*Encontre o valor de $k$ para o qual $f$ seja contínua em $x = -1$.*

**Problema 4** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2}$;

**b).** $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right)}$.

**Problema 5** *Calcule os limites:*

***a).*** $\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{3x+1}{3x-5} \right)^x$; ***b).*** $\lim_{n \to +\infty} \left( 1 + \frac{4}{n} \right)^n$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2013**
**Data: Sexta-feira, 19 de Julho** **Turma M1**

---

**Exercício 1**

**a).**

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{6+t}-\sqrt{6}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{6+t}-\sqrt{6}}{t}\frac{\sqrt{6+t}+\sqrt{6}}{\sqrt{6+t}+\sqrt{6}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{6+t-6}{t\left(\sqrt{6+t}+\sqrt{6}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{t\left(\sqrt{6+t}+\sqrt{6}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{6+t}+\sqrt{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$\square$

**b).**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+1-1}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= 2$$

$\blacksquare$

**Exercício 2**

**a).**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{99}-x^{98}}{x^{100}-x^{99}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{100}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^{100}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$= 0$$

$\square$

**b).**

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+5x+1}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+5x+1}{(x-3)(x+1)}$$

*Observe que, quando $x\to 3^+$ temos*

$$x>3 \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x-3\to 0^+,$$

$$x+1\to 4,$$

*e*

$$x^2+5x+1\to 25$$

*Ou seja*

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+5x+1}{x^2-2x-3} = +\infty$$

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Para que a função $f$ seja contínua $x=-1$ devemos ter que*

**i).** *$f(-1)$ existe!*

*Para isto, observe que*

$$f(-1) = -k-3$$

*ou seja, $f(-1)$ depende da constante $k$, mas existe.*

**ii).** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *existe!*

*Para isto, é necessário que*

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x)$$

*ou seja*

$$\lim_{x\to -1^+} x^2+4 = \lim_{x\to -1^-} kx-3 \Leftrightarrow$$

$$5 = -k-3 \Leftrightarrow$$

$$k = -8$$

**iii).** *Por fim,*

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

*ou seja, devemos ter mais uma vez que*

$$5 = -k-3 \Leftrightarrow k = -8$$

*Portanto,* $k=-8$. ■

**Exercício 4**

**a).**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\text{sen}\,x}{x}\frac{\text{sen}\,x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

□

**b).**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{\frac{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{\frac{\frac{1}{4}\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{4}x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{\frac{1}{4}\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2}$$

$$= 12$$

■

**Exercício 5**

**a).**

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^x = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-5+5+1}{3x-5}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-5}+\frac{6}{3x-5}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^x$$

*Tome* $y$ *de tal forma que*

$$\frac{1}{y} = \frac{6}{3x-5}$$

*ou seja*

$$y = \frac{3x-5}{6}$$

*Observe que*

$$x\to +\infty \Rightarrow y\to +\infty$$

*e*

$$x = \frac{6y+5}{3}$$

*Portanto, segue-se disto que*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^x$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{6y+5}{3}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$= e^2$$

□

**b).** *Desejamos calcular*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$$

*Para isto, tome $y$ de tal forma que*

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{n}$$

*ou seja,*

$$y = \frac{n}{4}$$

*Assim, teremos que*

$$n \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

*e*

$$n = 4y$$

*Portanto,*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^4$$

$$= e^4$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma M1**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2ª Prova** **1º Semestre** **2013**

**Data: Segunda-feira, 26 de Agosto de 2013** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Encontre* $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$, *sabendo que*

**a).** $y = \left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{x}\right)\right]^{\frac{5}{2}}$;

**b).** $y = \left(\dfrac{3x+2}{x}\right)(x^{-5}+1)$.

**Problema 2** *Mostre que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, \text{ se } x \leq 1 \\ \\ x+2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

*é contínua, mas não-diferenciável em* $x = 1$.

**Problema 3** *Dado que* $f'(x) = \sqrt{3x+4}$ *e* $g(x) = x^2 - 1$, *encontre* $F'(x)$ *se* $F(x) = f(g(x))$.

**Problema 4** *Encontre as equações de duas retas pela origem que são tangentes à elipse de equação* $2x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$.

**Problema 5** *Uma partícula move-se ao longo da curva* $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. *Encontre todos os valores de* $x$ *nos quais a taxa de variação de* $x$ *em relação ao tempo é trez vezes a de* $y$. *[Suponha que* $\dfrac{dx}{dt}$ *nunca é nula].*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** — **2013**
**Data: Sábado, 7 de Setembro** — **Turma M1**

---

**Exercício 1** *Desejamos calcular*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$$

*onde*

**a).** $y = \left[sen\left(\frac{3}{x}\right)\right]^{\frac{5}{2}}$

*Para isto considere*

$$v = \frac{3}{x}$$

$$w = sen\, v$$

*e observe que*

$$y = w^{\frac{5}{2}}$$

*Assim, usando a regra da cadeia, na forma de Leibnitz, teremos que*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{5}{2}w^{\frac{3}{2}}\cos v\left(-\frac{3}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{15}{2x^2}\left[\text{sen}\left(\frac{3}{x}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{x}\right)$$

*Portanto,*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{15}{2}\text{sen}^{\frac{3}{2}}3\cos 3$$

□

**b).** $y = \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(x^{-5}+1\right)$

*Considere*

$$p(x) = \frac{3x+2}{x}$$

$$q(x) = x^{-5}+1$$

*e observe que*

$$p'(x) = \frac{3x-(3x+2)}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$q'(x) = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

*Além disto, temos que*

$$y = p(x)q(x)$$

*e, usando a regra do produto, teremos*

$$\frac{dy}{dx} = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

$$= \left(-\frac{2}{x^2}\right)\left(x^{-5}+1\right) + \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(-\frac{5}{x^6}\right)$$

$$= -\frac{2+2x^5}{x^7} - \frac{15x+10}{x^7}$$

$$= \frac{-2x^5-15x-12}{x^7}$$

*Logo,*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{-2x^5-15x-12}{x^7}\right|_{x=1} = -29$$

■

**Exercício 2** *Sendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, \text{ se } x \leq 1 \\ x+2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

*observe, que*

- $f(1) = 3$. *Ou seja,* $f(1)$ *existe.*
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x+2 = 3;$
  $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+2 = 3;$
  *Portanto,*
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$
- *Por fim, temos que*
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*Podemos concluir, com isto, que a função $f$ é contínua em $x = 1$.*
*Porém,*

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - 3}{h}$$

*e, para $h \to 0^+$, tem-se*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h) + 2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

*por outro lado, para $h \to 0^-$, tem-se*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 2 + h$$

$$= 2$$

*Ou seja,*

$$f'(1) = \nexists$$

■

**Exercício 3** *É dado que*

$$F(x) = f(g(x))$$

*Portanto, usando a regra da cadeia, teremos*

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

*Como*

$$f'(x) = \sqrt{3x+4}$$

*e*

$$g(x) = x^2 - 1$$

*segue-se que*

$$f'(g(x)) = \sqrt{3g(x) + 4}$$

$$= \sqrt{3\left(x^2 - 1\right) + 4}$$

$$= \sqrt{3x^2 + 1}$$

*e*

$$g'(x) = 2x$$

*Assim,*

$$F'(x) = 2x\sqrt{3x^2+1}$$

■

**Exercício 4** *Considere $P = (a, b)$ como sendo o ponto da curva sobre a elipse*

$$2x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$$

*onde a reta tangente passa pela origem. Admitindo $y = f(x)$ e, usando derivação implícita sobre a equação da elipse dada, teremos*

$$4x - 4 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

*ou seja*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{y}$$

*Portanto, o coeficiente angular da reta que estamos procurando é dado por*

$$m = f'(a) = \frac{2-2a}{b}$$

*Aqui, estamos usando que $b = f(a)$. Além disso, como $P$ é um ponto da elipse, segue-se que*

$$2a^2 - 4a + b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 - 4a + 2 - 2 + b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(a-1)^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$b = \pm\sqrt{1 - 2(a-1)^2}$$

*Agora, perceba que, a reta que passa pelo ponto $P = (a, b)$ com coeficiente angular $m$, é dada por*

$$y - b = m(x - a) \Leftrightarrow$$

$$y - b = 2\frac{(1-a)(x-a)}{b}$$

*Como a reta que procuramos deve passar pela origem, segue-se que*

$$-b = 2\frac{(1-a)(-a)}{b} \Leftrightarrow$$

$$-b^2 = -2a + 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = 2a - 2a^2$$

*Ou seja*

$$1 - 2(a-1)^2 = 2a - 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2a^2 + 4a - 2 = 2a - 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$4a - 1 = 2a \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{1}{2}$$

*donde segue-se que*

$$b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

*e*

$$m = \pm\frac{2-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{2}$$

*E, as retas procuradas são*

$$y = \sqrt{2}x \,\mathrm{e}\, y = -\sqrt{2}x$$

■

**Exercício 5** *Como a partícula está movendo-se sobre a curva*

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

*segue-se que*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{-x^2 + 1}{(x^2+1)^2}\frac{dx}{dt}$$

*Estamos interessados nos pontos sobre esta curva onde*

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$$

*Então,*

$$\frac{dy}{dt} = 3\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\frac{dy}{dt}$$

*donde teremos*

$$3\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$-3x^2 + 3 = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^4 + 5x^2 - 2 = 0$$

*e, resolvendo a equação bi-quadrada, teremos*

$$x = \pm\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma M1**

**Prof$^{o}$. Edson**

**3$^{a}$ Prova** **1$^{o}$ Semestre** **2013**

**Data: Quarta-feira, 25 de Setembro de 2013** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Determine e classifique os pontos extremos da função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \; se\, x \geq 1 \\ \\ 1 - x^2, \; se\, x < 1 \end{cases}$$

**Problema 2** *Calcule os limites, caso existam.*

**a).** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 3^x}{5 - 5^x}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x + e^{-x}}{x^2}$.

**Problema 3** *Ache o ponto do gráfico de* $y = x^2 + 1$ *mais próximo do ponto* $(3, 1)$.

**Problema 4** *Resolva as integrais*

**a).** $\displaystyle\int x(\ln x)^2 dx$;

**b).** $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\, dx$.

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelo conjunto formado pelos pontos* $(x, y)$ *tais que* $x \geq 0$ *e* $-x \leq y \leq x - x^2$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2013**
**Data: Segunda-feira, 30 de Setembro** **Turma M1**

---

**Exercício 1** *Sendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \; se\, x \geq 1 \\ 1 - x^2, \; se\, x < 1 \end{cases}$$

*Teremos*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, \; se\, x > 1 \\ -2x, \; se\, x < 1 \end{cases}$$

*e*

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)}{h}$$

*mas,*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= 2$$

*e*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1 - (1+h)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1 - 1 - 2h - h^2}{h}$$

$$= -2$$

*ou seja*

$$f'(1) = \nexists$$

*Observe, entretanto que, fazendo*

$$f'(x) = 0$$

*teremos como candidato oponto $x = 0$ e, além disto temos que*

$$f''(x) = -2, \; se \; x < 1$$

*e, isto nos permite afirmar que $x = 0$ é um* ***ponto de máximo absoluto****, haja visto que é o único candidato.Embora $f'(1)$ não exista, se observarmos o gráfico de $f$ poderemos perceber que $x = 1$ é um* ***ponto de mínimo local****.* ■

**Exercício 2**

**a).** *Usando a* ***Regra de L'Hospital*** *teremos*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3 - 3^x}{5 - 5^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3^x \ln 3}{-5^x \ln 5}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\ln 3}{\ln 5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$= +\infty$$

□

**b).** *Para resolvermos este limite observemos inicialmente que*

$$x \to 0 \Rightarrow x\cos x + e^{-x} \to 1$$

*e*

$$x \to 0 \Rightarrow x^2 \to 0^+$$

*Portanto*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + e^{-x}}{x^2} = +\infty$$

■

**Exercício 3** *Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^2 + 1$, ou seja*

$$b = a^2 + 1$$

*A distância entre o ponto $P$ e o ponto $(3, 1)$ é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2}$$

$$= \sqrt{(a-3)^2 + a^4}$$

$$= \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9}$$

*Considere a função*

$$\mathbf{g}(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9$$

*e observe que, minimizando a função* $\mathbf{g}$, *estamos também minimizando a função* $\mathbf{d}$. *Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 4a^3 + 2a - 6$$

*e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação*

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$4a^3 + 2a - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^3 + a - 3 = 0$$

*Donde segue-se que* $a = 1$ *é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função* $\mathbf{g}$, *observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 6a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

*Com isto,temos que* $b = 2$ *e o ponto procurado é* $(1, 2)$. ■

**Exercício 4**

**a).** *Desejamos calcular a integral*

$$\int x\left(\ln x\right)^2 dx$$

*Usando integração por partes, tome*

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = x\,dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

*Assim, temos que*

$$\int x\left(\ln x\right)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x dx \qquad (1)$$

*Usando novamente o método de integração por partes, tome*

$$\begin{cases} z = \ln x \\ dw = x\,dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} dz = \dfrac{1}{x}dx \\ w = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

*donde segue-se que*

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

*Assim, substituindo este resultado na equação (1), teremos*

$$\int x\left(\ln x\right)^2 dx = \frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right] + k$$

*onde* $k \in \mathbb{R}$. □

**b).** *Desejamos calcular a integral*

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx$$

*Para isto, tome* $u = x - 1$ *e observe que*

$$du = dx$$

*e*

$$x = u + 1$$

*Logo, segue-se que*

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}du$$

$$= \int (u^2 + 2u + 1)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

$$= \frac{2(x-1)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + $$
$$+ \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

*onde* $k \in \mathbb{R}$. ■

**Exercício 5** *Observe inicialmente que as curvas* $y = -x$ *e* $y = x - x^2$ *interceptam-se em* $x = 0$ *e* $x = 2$. *Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo* $(0, 2)$ *e a área desta região pode ser obtida através da integral*

$$A = \int_0^2 \left| x - x^2 + x \right| dx$$

$$= \left| \int_0^2 (2x - x^2) dx \right|$$

$$= \left| x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_0^2$$

$$= \left| 4 - \frac{8}{3} \right|$$

$$= \frac{4}{3}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma M1**

**Prof$^{o}$. Edson**

**Prova Final** **1$^{o}$ Semestre** **2013**

**Data: Segunda-feira, 30 de Setembro** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites, caso existam.*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

**Problema 2** *Em que ponto(s) a reta tangente à curva* $y^3 = 2x^2$ *é perpendicular à reta* $x + 2y - 2 = 0$?

**Problema 3** *Determine o ponto do gráfico de* $y = x^3$ *mais próximo do ponto* $(4, 0)$.

**Problema 4** *Resolva as integrais*

**a).** $\displaystyle\int x^2(x+1)^{10}dx$;

**b).** $\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\, dx$.

**Problema 5** *Calcule a área da região entre as curvas* $y^2 = -4x$ *e* $x^2 = -4y$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2013**
**Data: Quarta-feira, 2 de Outubro** **Turma M1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Usando a* ***Regra de L'Hospital*** *teremos*

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{4x\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{1}{40}$$

$\square$

**b).** *Novamente usaremos a* ***Regra de L'Hospital****:*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$=0$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Observe que a reta em questão possui coeficiente angular*

$$m_2=-\frac{1}{2}$$

*Logo, a reta que estamos procurando possui coeficiente angular $m_1$, sendo*

$$m_1\cdot m_2=-1$$

*ou seja,*

$$m_1=2$$

*Considere $(a,b)$ sendo o ponto sobre a curva $y^3=2x^2$, tal que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=m_1=2 \qquad (1)$$

*usando derivação implícita sobre a equação da curva dada, teremos*

$$3y^2\frac{dy}{dx}=4x$$

*donde segue-se que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\frac{4a}{3b^2}$$

*Como o ponto $(a,b)$ está sobre a curva, segue-se que*

$$b^3=2a^2\Leftrightarrow b=\sqrt[3]{2a^2}$$

*Assim, temos*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}$$

*Voltando à equação (1) teremos*

$$\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}=2\Leftrightarrow$$

$$4a=6\sqrt[3]{4a^4}\Leftrightarrow$$

$$2a=3\sqrt[3]{4a^4}\Leftrightarrow$$

$$8a^3=27\cdot 4a^4\Leftrightarrow$$

$$a=\frac{2}{27}$$

*e, em conseqüência disto,*

$$b=\frac{2}{9}$$

*Ou seja, o ponto procurado é*

$$(a,b)=\left(\frac{2}{27},\frac{2}{9}\right)$$

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^3$, ou seja*

$$b = a^3$$

*A distância entre o ponto $P$ e o ponto $(4, 0)$ é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a-4)^2 + a^6}$$

$$= \sqrt{a^6 + a^2 - 8a + 16}$$

*Considere a função*

$$\mathbf{g}(a) = a^6 + a^2 - 8a + 16$$

*e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$, estamos também minimizando a função $\mathbf{d}$. Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 6a^5 + 2a - 8$$

*e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação*

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$6a^5 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^5 + a - 4 = 0$$

*Donde segue-se que $a = 1$ é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função $\mathbf{g}$, observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 30a^4 + 2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

*Com isto,temos que $b = 1$ e o ponto procurado é $(1, 1)$.* ■

**Exercício 4**

**a).** *Desejamos calcular a integral*

$$\int x^2(x+1)^{10}dx$$

*Para isto, tome $u = x + 1$ e observe que*

$$du = dx$$

*e*

$$x = u - 1$$

*Logo, segue-se que*

$$\int x^2(x+1)^{10}dx = \int (u-1)^2 u^{10} du$$

$$= \int (u^2 - 2u + 1) u^{10} du$$

$$= \int \left(u^{12} - 2u^{11} + u^{10}\right) du$$

$$= \frac{u^{13}}{13} - 2\frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{11}}{11} + k$$

$$= \frac{(x+1)^{13}}{13} - \frac{(x+1)^{12}}{6} + \\ + \frac{(x+1)^{11}}{11} + k$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* □

**b).** *Agora, queremos calcular a integral*

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx$$

*Usando integração por partes, tome*

$$\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} du = -e^{-x} dx \\ v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \end{cases}$$

*Assim, temos que*

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x dx \tag{2}$$

*Usando novamente o método de integração por partes, tome*

$$\begin{cases} z = e^{-x} \\ dw = \operatorname{sen} 2x \, dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} dz = -e^{-x} dx \\ w = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

*donde segue-se que*

$$\int e^{-x}\text{sen}\, 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx \qquad (3)$$

*Assim, substituindo o resultado obtido na equação (2) na equação (1), teremos*

$$\int e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}e^{-x}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x - \\ - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx$$

*Ou seja,*

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}e^{-x}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + k$$

*e*

$$\int e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{e^{-x}}{5}\left(2\text{sen}\, 2x - \cos 2x\right) + k$$

*onde* $k \in \mathbb{R}$. ■

**Exercício 5** *Observe inicialmente que as curvas* $y^2 = -4x$ *e* $x^2 = -4y$ *interceptam-se em* $x = -4$ *e* $x = 0$. *Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo* $(-4, 0)$ *e a área desta região pode ser obtida através da integral*

$$A = \int_{-4}^{0}\left|\sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4}\right| dx$$

$$= \left|\int_{-4}^{0}\sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4}dx\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{6}\sqrt{(-4x)^3} - \frac{x^3}{12}\right|_{-4}^{0}$$

$$= \left|0 - \left[-\frac{64}{6} + \frac{64}{12}\right]\right|$$

$$= \frac{16}{3}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1ª Prova** | **1º Semestre** | **2013**

**Data: Quarta-feira, 17 de Julho de 2013** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{6+h}{3+2h}-2\right)$;

**b).** $\displaystyle\lim_{h\to -1}\frac{3-\sqrt{h^2+h+9}}{h^3+1}$.

**Problema 2** *Calcule os limites:*

**a).** $\displaystyle\lim_{t\to -1^+}\left(\frac{3}{t+1}-\frac{5}{t^2-1}\right)$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^3-15x^2}{13x}$.

**Problema 3** *Dada a função*

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2, \text{ se } x<4 \\ \\ 5x+k, \text{ se } x\geq 4 \end{cases}$$

*Encontre o valor de $k$ para o qual $f$ seja contínua em $x=4$.*

**Problema 4** *Calcule os limites:*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{4x}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$.

**Problema 5** *Calcule os limites:*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2013**
**Data: Sábado, 20 de Julho** **Turma X1**

---

**Exercício 1**

**a).**

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{6+h}{3+2h}-2\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{6+h-6-4h}{3+2h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{h-4h}{3+2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-3h}{3+2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{3+2h}$$

$$=-1$$

□

**b).** *Desejamos calcular*

$$A=\lim_{h\to -1}\frac{3-\sqrt{h^2+h+9}}{h^3+1}$$

*Para isto, multiplicaremos o numerador e denominador da função em questão por*

$$3+\sqrt{h^2+h+9}$$

*donde, teremos*

$$A=\lim_{h\to -1}\frac{9-h^2-h-9}{(h^3+1)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\lim_{h\to -1}\frac{-h(h+1)}{(h^3+1)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\lim_{h\to -1}\frac{-h(h+1)}{(h+1)\left(h^2-h+1\right)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\lim_{h\to -1}\frac{-h}{\left(h^2-h+1\right)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\frac{1}{18}$$

■

**Exercício 2**

**a).**

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\frac{3}{t+1}-\frac{5}{t^2-1}\right)=\lim_{t\to -1^+}\frac{3t-3-5}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to -1^+}\frac{3t-8}{(t+1)(t-1)}$$

*Observe que, quando* $t\to -1^+$ *temos*

$$t>-1\Rightarrow t+1>0\Rightarrow t+1\to 0^+,$$

$$t-1\to -2,$$

*e*

$$3t-8\to -11$$

*Ou seja*

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\frac{3}{t+1}-\frac{5}{t^2-1}\right)=+\infty$$

□

**b).**

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^3-15x^2}{13x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3\left(7-\dfrac{15}{x}\right)}{13x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(7-\dfrac{15}{x}\right)}{13}$$

$$=+\infty$$

■

**Exercício 3** *Para que a função* $f$ *seja contínua* $x=4$ *devemos ter que*

**i).** *$f(4)$ existe!*

*Para isto, observe que*

$$f(4) = 20 + k$$

*ou seja, $f(4)$ depende da constante $k$, mas existe.*

**ii).** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ *existe!*

*Para isto, é necessário que*

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x)$$

*ou seja*

$$\lim_{x\to 4^+} 5x + k = \lim_{x\to 4^-} 3x + 2 \Leftrightarrow$$

$$20 + k = 14 \Leftrightarrow$$

$$k = -6$$

**iii).** *Por fim,*

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

*ou seja, devemos ter mais uma vez que*

$$14 = 20 + k \Leftrightarrow k = -6$$

*Portanto, $k = -6$.* ∎

**Exercício 4**

**a).**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x}\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 2x}{4x\,(1+\cos 2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4x\,(1+\cos 2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\,(1+\cos 2x)}$$

$$= 0$$

□

**b).** *Desejamos calcular*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}$$

*Tome*

$$y = x - \frac{\pi}{2}$$

*Observe que*

$$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \to 0$$

*e*

$$x = y + \frac{\pi}{2}$$

*Portanto, segue-se disto que*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\cos y \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} y \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{-\operatorname{sen} y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}$$

$$= 1$$

∎

**Exercício 5**

**a).**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{2x}\frac{e^{x}-1}{x}$$

*Tome*

$$y = e^x - 1$$

*Observe que*

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

*e*

$$x = \ln(y+1)$$

*Portanto, segue-se disto que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{2x}\frac{e^{x}-1}{x}$$

$$= \lim_{y\to 0}(y-1)^2\frac{y}{\ln(y+1)}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{y}\ln(y+1)}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(y-1)^2}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}}$$

$$= 1$$

$\square$

**b).** *Desejamos calcular*

$$\lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$$

*Para isto, tome $y$ de tal forma que*

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3n}$$

*ou seja,*

$$y = 3n$$

*Assim, teremos que*

$$n \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

*e*

$$n = \frac{y}{3}$$

*Portanto,*

$$\lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{y\to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{3}}$$

$$= \lim_{y\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{e}$$

$\blacksquare$

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2$^{\text{a}}$ Prova** **1$^{\text{o}}$ Semestre** **2013**

**Data: Segunda-feira, 26 de Agosto de 2013** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Encontre* $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$, *sabendo que*

**a).** $y = \sqrt[3]{2 + \operatorname{tg}(x^2)}$;

**b).** $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)(2x^7 - x^2)$.

**Problema 2** *Mostre que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, \text{ se } x \leq 1 \\ \\ 3x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

*é contínua em* $x = 1$. *Verifique se é diferenciável em* $x = 1$. *Se for, encontre o valor da derivada nesse ponto.*

**Problema 3** *Determine* $f'(x^2)$ *sabendo que* $\frac{d}{dx}\left[f(x^2)\right] = x^2$.

**Problema 4** *Em que ponto(s) a reta tangente à curva* $y^3 = 2x^2$ *é perpendicular à reta* $x + 2y - 2 = 0$?

**Problema 5** *Uma partícula move-se ao longo da curva* $16x^2 + 9y^2 = 144$. *Encontre todos os pontos* $(x, y)$ *nos quais as taxas de variação de* $x$ *e de* $y$ *em relação ao tempo são iguais. [Suponha que* $\dfrac{dx}{dt}$ *e* $\dfrac{dy}{dt}$ *nunca são nulas no mesmo ponto].*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**1º Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2013**
**Data: Segunda-feira, 30 de Setembro** **Turma X1**

---

**Exercício 1** *Desejamos calcular*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$$

*onde*

**a).** $y = \sqrt[3]{2 + \operatorname{tg}\,(x^2)}$

*Para isto considere*

$$v = x^2$$

$$w = 2 + \operatorname{tg} v$$

*e observe que*

$$y = \sqrt[3]{w}$$

*Assim, usando a regra da cadeia, na forma de Leibnitz, teremos que*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{3}w^{-\frac{2}{3}}\sec^2 v\,(2x)$$

$$= \frac{2x\,\sec^2 x^2}{3\sqrt[3]{[2 + \operatorname{tg}\,(x^2)]^2}}$$

*Portanto,*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{2\,\sec^2 1}{3\sqrt[3]{[2 + \operatorname{tg}\,(1^2)]^2}}$$

□

**b).** $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(2x^7 - x^2\right)$

*Considere*

$$p(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$q(x) = 2x^7 - x^2$$

*e observe que*

$$p'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$q'(x) = 14x^6 - 2x$$

*Além disto, temos que*

$$y = p(x)q(x)$$

*e, usando a regra do produto, teremos*

$$\frac{dy}{dx} = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2}\left(2x^7 - x^2\right) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(14x^6 - 2x\right)$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2}\left(7x^7 + 2x^6 - 7x^5 - x^2 - x + 1\right)$$

*Logo,*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{2\left(7x^7 + 2x^6 - 7x^5 - x^2 - x + 1\right)}{(x+1)^2}\right|_{x=1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

■

**Exercício 2** *Sendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, \text{ se } x \le 1 \\ 3x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

*observe, que*

- $f(1) = 3$. *Ou seja,* $f(1)$ *existe.*
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x = 3$;
  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + x + 1 = 3$;
  *Portanto,*
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$
- *Por fim, temos que*
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*Podemos concluir, com isto, que a função $f$ é contínua em $x = 1$.*
*Porém,*

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - 3}{h}$$

*e, para $h \to 0^+$, tem-se*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3h}{h}$$

$$= 3$$

*por outro lado, para $h \to 0^-$, tem-se*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 + (1+h) + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{3h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 3 + h$$

$$= 3$$

*Ou seja,*

$$f'(1) = 3$$

■

**Exercício 3** *Sabe-se que*

$$\frac{d}{dx}\left[f(x^2)\right] = x^2$$

*Portanto, usando a regra da cadeia, teremos*

$$f'(x^2)\,(2x) = x^2$$

*Portanto*

$$f'(x^2) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

■

**Exercício 4** *Observe que a reta em questão possui coeficiente angular*

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

*Logo, a reta que estamos procurando possui coeficiente angular $m_1$, sendo*

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

*ou seja,*

$$m_1 = 2$$

*Considere $(a, b)$ sendo o ponto sobre a curva $y^3 = 2x^2$, tal que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = m_1 = 2 \qquad (1)$$

*usando derivação implícita sobre a equação da curva dada, teremos*

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 4x$$

*donde segue-se que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3b^2}$$

*Como o ponto $(a, b)$ está sobre a curva, segue-se que*

$$b^3 = 2a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2a^2}$$

*Assim, temos*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}$$

*Voltando à equação (1) teremos*

$$\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$4a = 6\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$2a = 3\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$8a^3 = 27 \cdot 4a^4 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2}{27}$$

*e, em conseqüência disto,*

$$b = \frac{2}{9}$$

*Ou seja, o ponto procurado é*

$$(a, b) = \left(\frac{2}{27}, \frac{2}{9}\right)$$

■

**Exercício 5** *A partícula move-se sobre a curva*

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

*Logo,*

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (2)$$

*Desejamos encontrar os pontos* $(x, y)$ *onde*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

*Assim, substituindo (3) em (2), teremos*

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(32x + 18y)\frac{dx}{dt} = 0$$

*Como* $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, *segue-se que os pontos procurados obedecem a equação*

$$32x + 18y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-9y}{16}$$

*Como estes pontos estão sobre a curva dada, segue-se que*

$$16\left(\frac{-9y}{16}\right)^2 + 9y^2 = 144 \Rightarrow$$

$$\frac{81y^2}{16} + 9y^2 = 144 \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{16 \cdot 144}{225} \Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{16}{5}$$

*e*

$$x = \mp\frac{9}{5}$$

*Portanto, os pontos procurados são* $\left(\dfrac{9}{5}, -\dfrac{16}{3}\right)$ *e* $\left(-\dfrac{9}{5}, \dfrac{16}{3}\right)$ ■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Prof$^o$. Edson**

**3ª Prova** **1º Semestre** **2013**

**Data: Quarta-feira, 25 de Setembro de 2013** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Determine e classifique os pontos extremos da função*

$$f(x) = \frac{1}{12}\left(x^4 + 6x^3 - 18x^2\right)$$

**Problema 2** *Calcule os limites, caso existam.*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

**Problema 3** *Determine o ponto do gráfico de $y = x^3$ mais próximo do ponto $(4, 0)$.*

**Problema 4** *Resolva as integrais*

**a).** $\displaystyle\int x^2(x+1)^{10}dx$;

**b).** $\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\, dx$.

**Problema 5** *Calcule a área da região entre as curvas $y^2 = -4x$ e $x^2 = -4y$.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2013**
**Data: Segunda-feira, 30 de Setembro** **Turma X1**

---

**Exercício 1** *Sendo*

$$f(x) = \frac{1}{12}\left(x^4 + 6x^3 - 18x^2\right)$$

*teremos*

$$f'(x) = \frac{1}{12}\left(4x^3 + 18x^2 - 36x\right)$$

$$= \frac{x}{6}\left(2x^2 + 9x - 18\right)$$

*Então, segue-se que*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{6}\left(2x^2 + 9x - 18\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x\left(2x^2 + 9x - 18\right) = 0$$

*Donde segue-se que os candidatos a extremos da função $f$ são*

$$x = 0,\ x = \frac{3}{2} \text{ e } x = -6$$

*Para classificar tais candidatos devemos utilizar a função $f''$. Para isto, observe que*

$$f''(x) = \frac{1}{12}\left(12x^2 + 36x - 36\right)$$

$$= x^2 + 3x - 3$$

*e*

$$f''(0) = -3 < 0$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4} > 0$$

$$f''(-6) = 15 > 0$$

*Portanto, $x = 0$ é um* ***ponto de máximo absoluto****, $x = \frac{3}{2}$ e $x = -6$ são pontos de mínimo. Como $f(\frac{3}{2}) = -\frac{81}{64}$ e $f(-6) = -54$, segue-se que $x = -6$ é um* ***ponto de mínimo absoluto*** *e $x = \frac{3}{2}$ é um* ***ponto de mínimo local****.* ■

**Exercício 2**

**a).** *Usando a* ***Regra de L'Hospital*** *teremos*

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{4x\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{1}{40}$$

□

**b).** *Novamente usaremos a* ***Regra de L'Hospital****:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= 0$$

■

**Exercício 3** *Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^3$, ou seja*

$$b = a^3$$

*A distância entre o ponto $P$ e o ponto $(4, 0)$ é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a-4)^2 + a^6}$$

$$= \sqrt{a^6 + a^2 - 8a + 16}$$

*Considere a função*

$$\mathbf{g}(a) = a^6 + a^2 - 8a + 16$$

*e observe que, minimizando a função* $\mathbf{g}$, *estamos também minimizando a função* $\mathbf{d}$. *Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 6a^5 + 2a - 8$$

*e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação*

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$6a^5 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^5 + a - 4 = 0$$

*Donde segue-se que* $a = 1$ *é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função* $\mathbf{g}$, *observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 30a^4 + 2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

*Com isto,temos que* $b = 1$ *e o ponto procurado é* $(1, 1)$. ■

**Exercício 4**

**a).** *Desejamos calcular a integral*

$$\int x^2(x+1)^{10}dx$$

*Para isto, tome* $u = x + 1$ *e observe que*

$$du = dx$$

*e*

$$x = u - 1$$

*Logo, segue-se que*

$$\begin{aligned}\int x^2(x+1)^{10}dx &= \int (u-1)^2u^{10}du \\ &= \int (u^2 - 2u + 1)u^{10}du \\ &= \int \left(u^{12} - 2u^{11} + u^{10}\right) du \\ &= \frac{u^{13}}{13} - 2\frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{11}}{11} + k \\ &= \frac{(x+1)^{13}}{13} - \frac{(x+1)^{12}}{6} + \\ &\quad + \frac{(x+1)^{11}}{11} + k\end{aligned}$$

*onde* $k \in \mathbb{R}$. □

**b).** *Agora, queremos calcular a integral*

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx$$

*Usando integração por partes, tome*

$$\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} du = -e^{-x}dx \\ v = \frac{1}{2}\text{sen}\, 2x \end{cases}$$

*Assim, temos que*

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}e^{-x}\text{sen}\, 2x + \frac{1}{2}\int e^{-x}\text{sen}\, 2x dx \tag{1}$$

*Usando novamente o método de integração por partes, tome*

$$\begin{cases} z = e^{-x} \\ dw = \text{sen}\, 2x \, dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} dz = -e^{-x}dx \\ w = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

*donde segue-se que*

$$\int e^{-x}\text{sen}\, 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx \tag{2}$$

*Assim, substituindo o resultado obtido na equação (2) na equação (1), teremos*

$$\int e^{-x}\cos 2x \, dx = \frac{1}{2}e^{-x}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x - \\ - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx$$

*Ou seja,*

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\cos 2x \, dx = \frac{1}{2}e^{-x}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + k$$

*e*

$$\int e^{-x}\cos 2x \, dx = \frac{e^{-x}}{5}\left(2\text{sen}\, 2x - \cos 2x\right) + k$$

*onde* $k \in \mathbb{R}$. ■

**Exercício 5** *Observe inicialmente que as curvas* $y^2 = -4x$ *e* $x^2 = -4y$ *interceptam-se em* $x = -4$ *e* $x = 0$. *Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo* $(-4, 0)$ *e a área desta região pode ser obtida através da integral*

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{0} \left| \sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4} \right| dx \\
&= \left| \int_{-4}^{0} \sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4} dx \right| \\
&= \left| -\frac{1}{6}\sqrt{(-4x)^3} - \frac{x^3}{12} \right|_{-4}^{0} \\
&= \left| 0 - \left[ -\frac{64}{6} + \frac{64}{12} \right] \right| \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**Prova Final** | **1$^{\text{o}}$ Semestre** | **2013**

**Data: Segunda-feira, 30 de Setembro** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites, caso existam.*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-3^x}{5-5^x}$;

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+e^{-x}}{x^2}$.

**Problema 2** *Encontre as equações de duas retas pela origem que são tangentes à elipse de equação* $2x^2-4x+y^2+1=0$.

**Problema 3** *Ache o ponto do gráfico de* $y=x^2+1$ *mais próximo do ponto* $(3,1)$.

**Problema 4** *Resolva as integrais*

**a).** $\displaystyle\int x(\ln x)^2dx$;

**b).** $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$.

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelo conjunto formado pelos pontos* $(x,y)$ *tais que* $x\geq 0$ *e* $-x\leq y\leq x-x^2$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{o}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2013**
**Data: Quarta-feira, 2 de Outubro** **Turma X1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Usando a* ***Regra de L'Hospital*** *teremos*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-3^x}{5-5^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3^x\ln 3}{-5^x\ln 5}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln 3}{\ln 5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$=+\infty$$

$\square$

**b).** *Para resolvermos este limite observemos inicialmente que*

$$x\to 0\Rightarrow x\cos x+e^{-x}\to 1$$

*e*

$$x\to 0\Rightarrow x^2\to 0^+$$

*Portanto*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+e^{-x}}{x^2}=+\infty$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Considere $P=(a,b)$ como sendo o ponto da curva sobre a elipse*

$$2x^2-4x+y^2+1=0$$

*onde a reta tangente passa pela origem. Admitindo $y=f(x)$ e, usando derivação implícita sobre a equação da elipse dada, teremos*

$$4x-4+2y\frac{dy}{dx}=0$$

*ou seja*

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{2-2x}{y}$$

*Portanto, o coeficiente angular da reta que estamos procurando é dado por*

$$m=f'(a)=\frac{2-2a}{b}$$

*Aqui, estamos usando que $b=f(a)$. Além disso, como $P$ é um ponto da elipse, segue-se que*

$$2a^2-4a+b^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$2a^2-4a+2-2+b^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$2(a-1)^2+b^2=1\Leftrightarrow$$

$$b=\pm\sqrt{1-2(a-1)^2}$$

*Agora, perceba que, a reta que passa pelo ponto $P=(a,b)$ com coeficiente angular $m$, é dada por*

$$y-b=m(x-a)\Leftrightarrow$$

$$y-b=2\frac{(1-a)(x-a)}{b}$$

*Como a reta que procuramos deve passar pela origem, segue-se que*

$$-b=2\frac{(1-a)(-a)}{b}\Leftrightarrow$$

$$-b^2=-2a+2a^2\Leftrightarrow$$

$$b^2=2a-2a^2$$

*Ou seja*

$$1-2(a-1)^2=2a-2a^2\Leftrightarrow$$

$$1-2a^2+4a-2=2a-2a^2\Leftrightarrow$$

$$4a-1=2a\Leftrightarrow$$

$$a=\frac{1}{2}$$

*donde segue-se que*

$$b=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

*e*

$$m = \pm\frac{2-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{2}$$

*E, as retas procuradas são*

$$y = \sqrt{2}x \,\mathrm{e}\, y = -\sqrt{2}x$$

■

**Exercício 3** *Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^2 + 1$, ou seja*

$$b = a^2 + 1$$

*A distância entre o ponto $P$ e o ponto $(3, 1)$ é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2}$$

$$= \sqrt{(a-3)^2 + a^4}$$

$$= \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9}$$

*Considere a função*

$$\mathbf{g}(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9$$

*e observe que, minimizando a função* $\mathbf{g}$, *estamos também minimizando a função* $\mathbf{d}$. *Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 4a^3 + 2a - 6$$

*e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação*

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$4a^3 + 2a - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^3 + a - 3 = 0$$

*Donde segue-se que $a = 1$ é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função* $\mathbf{g}$, *observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 6a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

*Com isto,temos que $b = 2$ e o ponto procurado é $(1, 2)$.* ■

**Exercício 4**

**a).** *Desejamos calcular a integral*

$$\int x (\ln x)^2 \, dx$$

*Usando integração por partes, tome*

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ \\ dv = x\,dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

*Assim, temos que*

$$\int x (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x dx \qquad (1)$$

*Usando novamente o método de integração por partes, tome*

$$\begin{cases} z = \ln x \\ \\ dw = x\,dx \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} dz = \dfrac{1}{x} dx \\ \\ w = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

*donde segue-se que*

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

*Assim, substituindo este resultado na equação (1), teremos*

$$\int x (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right] + k$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* □

**b).** *Desejamos calcular a integral*

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx$$

*Para isto, tome $u = x - 1$ e observe que*

$$du = dx$$

*e*

$$x = u + 1$$

*Logo, segue-se que*

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}du$$

$$= \int (u^2+2u+1)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

$$= \frac{2(x-1)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + $$
$$+ \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.* ■

**Exercício 5** *Observe inicialmente que as curvas $y = -x$ e $y = x - x^2$ interceptam-se em $x = 0$ e $x = 2$. Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo $(0, 2)$ e a área desta região pode ser obtida através da integral*

$$A = \int_0^2 \left|x - x^2 + x\right| dx$$

$$= \left|\int_0^2 (2x - x^2)dx\right|$$

$$= \left|x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_0^2$$

$$= \left|4 - \frac{8}{3}\right|$$

$$= \frac{4}{3}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma MX**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1$^{\text{a}}$ Prova** **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2015**

**Data: Terça-feira, 01 de Dezembro de 2015** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^6+5}-x^3\right)$;

**b).** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

**Problema 2** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{99^x-99^3}{x-3}$;

**b).** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$.

**Problema 3** *Encontre um valor diferente de zero para a constante $k$ que torne a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}, \text{ se } x<0 \\ \\ 3x+2k^2, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

*contínua em $x=0$.*

**Problema 4** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$;

**b).** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\cos 3x-\cos 4x}{x}$.

**Problema 5** *Calcule os limites:*

***a).*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}$;

***b).*** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{sen}\,(x^2+3x+2)}{x^3+1}$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2015**
**Data: Segunda-feira, 7 de Dezembro** **Turma MX**

---

## Exercício 1

**a).** *Considere*

$$A = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+5} - x^3\right)$$

*Observe que*

$$A = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+5} - x^3\right)\frac{\sqrt{x^6+5}+x^3}{\sqrt{x^6+5}+x^3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+5-x^6}{\sqrt{x^6+5}+x^3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^6+5}+x^3}$$

$$= 0$$

□

**b).** *Observe que, quando $x \to +\infty$, tem-se que*

$$\frac{2}{x} \to 0$$

$$x + \frac{2}{x} \to +\infty$$

$$3x \to +\infty$$

*Logo*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2}{x}\right)^{3x} = +\infty$$

■

## Exercício 2

**a).** *Desejamos calcular o seguinte limite*

$$\lim_{x\to 3}\frac{99^x - 99^3}{x-3}$$

*Para isto, considere*

$$u = x - 3$$

*e observe que,*

$$x \to 3 \Rightarrow u \to 0$$

*e*

$$x = u + 3$$

*Logo*

$$\lim_{x\to 3}\frac{99^x-99^3}{x-3} = \lim_{u\to 0}\frac{99^{(u+3)}-99^3}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{99^u 99^3 - 99^3}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{99^3\left(99^u-1\right)}{u}$$

*Considere agora,*

$$w = 99^u - 1$$

*e observe que,*

$$u \to 0 \Rightarrow w \to 0$$

*e*

$$u = \log_{99}(w+1)$$

*Assim,*

$$\lim_{x\to 3}\frac{99^x-99^3}{x-3} = \lim_{u\to 0}\frac{99^3\left(99^u-1\right)}{u}$$

$$= 99^3\lim_{w\to 0}\frac{w}{\log_{99}(w+1)}$$

$$= 99^3\lim_{w\to 0}\frac{1}{\frac{1}{w}\log_{99}(w+1)}$$

$$= 99^3\lim_{w\to 0}\frac{1}{\log_{99}(w+1)^{\frac{1}{w}}}$$

$$= 99^3\frac{1}{\log_{99} e}$$

$$= 99^3\ln 99$$

□

**b).** *Desejamos agora, calcular o limite*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

*Tome*

$$w = x - \frac{\pi}{4}$$

*e observe que,*

$$x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow w \to 0$$

*e*

$$x = w + \frac{\pi}{4}$$

*Ou seja*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{w\to 0} \frac{\text{tg}\,(w + \frac{\pi}{4}) - 1}{w}$$

*Temos da trigonometria, que*

$$\text{tg}\,(w + \frac{\pi}{4}) = \frac{\text{sen}\,(w + \frac{\pi}{4})}{\cos(w + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{\text{sen}\, w\, \cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\cos w}{\cos w \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\, w\, \text{sen}\,\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\, w + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos w}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos w - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\, w}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen}\, w + \cos w)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos w - \text{sen}\, w)}$$

$$= \frac{\text{sen}\, w + \cos w}{\cos w - \text{sen}\, w}$$

*Portanto,*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{w\to 0} \frac{\text{tg}\,(w + \frac{\pi}{4}) - 1}{w}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\frac{\text{sen}\, w + \cos w}{\cos w - \text{sen}\, w} - 1}{w}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\text{sen}\, w + \cos w - \cos w + \text{sen}\, w}{w\,(\cos w - \text{sen}\, w)}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{2\text{sen}\, w}{w\,(\cos w - \text{sen}\, w)}$$

$$= \lim_{w\to 0} 2\frac{\text{sen}\, w}{w}\frac{1}{\cos w - \text{sen}\, w}$$

$$= 2$$

■

**Exercício 3** *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{tg}\, kx}{x}, \, se\, x < 0 \\ 3x + 2k^2, se\, x \geq 0 \end{cases}$$

*Para que a função $f$ seja contínua em $x = 0$ devemos ter que*

**i).** *$f(0)$ existe!*

*Para isto, observe que*

$$f(0) = 2k^2$$

*ou seja, $f(0)$ depende da constante $k$, mas existe.*

**ii).** *$\lim_{x\to 0} f(x)$ existe!*

*Para isto, é necessário que*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

*ou seja*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(3x+2k^2\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}\Leftrightarrow$$

$$2k^2=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} kx}{x\cos kx}\Leftrightarrow$$

$$2k^2=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} kx}{kx}\frac{k}{\cos kx}$$

$$2k^2=k$$

$$2k^2-k=0$$

$$k=0\,ou\,\frac{1}{2}$$

**iii).** *Por fim,*

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

*ou seja, devemos ter mais uma vez que*

$$2k^2=k\Leftrightarrow k=0\,ou\,\frac{1}{2}$$

*Assim, como a constante $k$ deve ser diferente de zero, temos que $k=\frac{1}{2}$.* ■

**Exercício 4**

**a).**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

□

**b).** *Considere*

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos 3x-\cos 4x}{x}$$

*Observe que*

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1+1-\cos 3x-\cos 4x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 3x}{x}+\frac{1-\cos 4x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 3x}{x}\frac{3}{3}+\frac{1-\cos 4x}{x}\frac{4}{4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(3\frac{1-\cos 3x}{3x}+4\frac{1-\cos 4x}{4x}\right)$$

$$=3\cdot 0+4\cdot 0$$

$$=0$$

■

**Exercício 5**

**a).** *Queremos calcular o limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}$$

*Para isto, tome*

$$w=\frac{x}{3}$$

*e observe que*

$$x\to+\infty\Rightarrow w\to+\infty$$

*e*

$$x=3w$$

*Assim,*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}=\lim_{w\to+\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{-3w}$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^3}$$

$$=\frac{1}{e^3}$$

□

**b).** *Desejamos calcular*

$$B = \lim_{x \to -1} \frac{\text{sen}\left(x^2 + 3x + 2\right)}{x^3 + 1}$$

*Para isto, perceba que*

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

*e*

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

*Logo,*

$$B = \lim_{x \to -1} \frac{\text{sen}\left[(x+1)(x+2)\right]}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+2)\text{sen}\left[(x+1)(x+2)\right]}{(x+2)(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\text{sen}\left[(x+1)(x+2)\right]}{(x+1)(x+2)} \frac{(x+2)}{(x^2 - x + 1)}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma MX**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^a$ Prova** | **2$^o$ Semestre** | **2015**

**Data: Terça-feira, 16 de Fevereiro de 2016** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada das funções*

**a).** $f(x) = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$;

**b).** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**Problema 2** *Sendo* $f(x) = |\operatorname{sen} x|$. *Calcule* $f'(x)$ *e mostre onde* $f$ *não é derivável. Justifique.*

**Problema 3** *Onde a reta normal à parábola* $y = x - x^2$ *no ponto* $(1,0)$ *intercepta a parábola uma segunda vez?*

**Problema 4** *Se* $xy + e^y = e$ *encontre o valor de* $y''$ *no ponto onde* $x = 0$.

**Problema 5** *O volume de um cubo cresce a uma taxa de* $10\,cm^3/min$. *Com que rapidez está crescendo sua área quando o comprimento de uma de suas arestas for* $30cm$*?.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito 2$^{\text{a}}$ Prova** **2015**
**Data: Segunda-feira, 29 de Fevereiro** **Turma MX**

---

### Exercício 1

**a).** *Desejamos calcular a derivada da função*

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$$

*Observe que*

$$f(x) = p(q(x))$$

*sendo*

$$q(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$
$$= x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$p(x) = x^2$$

*com*

$$q'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$p'(x) = 2x$$

*Assim, usando a regra da cadeia, temos que*

$$f'(x) = p'(q(x))q'(x)$$
$$= 2\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{3} + \frac{1}{2x^{\frac{5}{6}}} - \frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3x^{\frac{5}{6}}} + \frac{1}{2x^{\frac{5}{6}}} - \frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{3x^{\frac{5}{6}}} - \frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}}$$

□

**b).** *Desejamos agora, calcular a derivada a seguinte função*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

*Considere*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

*sendo*

$$p(x) = x$$

$$q(x) = \sqrt{x^2+1}$$

*Observe que*

$$p'(x) = 1$$

$$q(x) = u(v(x))$$

*com*

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$u(x) = \sqrt{x}$$

*e*

$$v'(x) = 2x$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*Usando a regra da cadeia, segue-se que*

$$q'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

*e, usando a regra do quociente,*

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

■

**Exercício 2** *Observe que*

$$f(x) = |\operatorname{sen} x|$$

$$= \begin{cases} \operatorname{sen} x, \ se \operatorname{sen} x \geq 0 \\ -\operatorname{sen} x, \ se \operatorname{sen} x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{sen} x, \ se \ 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + 1 \\ -\operatorname{sen} x, \ se \ 2k\pi - 1 < x < 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

*Assim, para* $x \in (2k\pi, 2k\pi + 1)$*, temos*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

*Do mesmo modo, para* $x \in (2k\pi - 1, 2k\pi)$*, temos*

$$f(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = -\cos x$$

*Para* $x = 2k\pi$*,*

$$f'(2k\pi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2k\pi + h) - f(2k\pi)}{h}$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(2k\pi + h) - \operatorname{sen}(2k\pi)}{h} \\ \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-\operatorname{sen}(2k\pi + h) - \operatorname{sen}(2k\pi)}{h} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(2k\pi + h)}{h} = 1 \\ \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-\operatorname{sen}(2k\pi + h)}{h} = -1 \end{cases}$$

$$= \nexists$$

*De modo semelhante, chegamos também à conclusão de que* $f'(2k\pi + 1) = \nexists$*. Portanto, a função* $f$ *é derivável para quaisquer valores de* $x$ *exceto para* $x = 2k\pi$ *e* $x = 2k\pi + 1$*, com* $k \in \mathbb{Z}$*.* ■

**Exercício 3** *O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da parábola* $y = x - x^2$ *no ponto* $(1, 0)$ *é dado por*

$$m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$$

$$= (1 - 2x)|_{x=1}$$

$$= -1$$

*Entretanto, o coeficiente angular* $m_n$ *da reta normal ao gráfico neste mesmo ponto deve obedecer à seguinte condição*

$$m_n m_t = -1$$

*Portanto*

$$m_n = \frac{-1}{m_t} = 1$$

*Assim, a equação de reta normal pedida no problema é dada por*

$$(y - y_0) = m_n(x - x_0)$$

*sendo* $(x_0, y_0) = (1, 0)$*. Ou seja*

$$y = -x + 1$$

*Para descobrir em qual outro ponto esta reta intercepta a parábola, devemos resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} y = x - x^2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

*Donde segue-se que $x = 1$ ou $x = -1$. Como $x = 1$ é o ponto que já tínhamos, segue-se que, o ponto procurado é $(-1, -2)$.* ■

**Exercício 4** *Sabemos que*

$$xy + e^y = e \tag{1}$$

*Admitindo $y = y(x)$ e derivando implicitamente em relação a $x$ em ambos os lados desta equação teremos*

$$y + xy' + e^y y' = 0 \tag{2}$$

*Repetindo o processo,agora com esta última equação, teremos*

$$2y' + xy'' + e^y (y')^2 + e^y y'' = 0 \tag{3}$$

*Tomndo $x = 0$ na equação (1), obtemos*

$$0 \cdot y(0) + e^{y(0)} = e \Rightarrow$$

$$y(0) = 1$$

*Do mesmo modo, na equação (2), teremos*

$$y(0) + 0 \cdot y'(0) + e^{y(0)} y'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$1 + e^1 y'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y'(0) = \frac{1}{e}$$

*Por fim, substituindo $x = 0$ na equação (3), teremos*

$$2y'(0) + e^{y(0)} (y'(0))^2 + e^{y(0)} y''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{e} + e \left(\frac{1}{e}\right)^2 + ey''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{e} + ey''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y''(0) = -\frac{3}{e^2}$$

■

**Exercício 5** *Considerando $x$ sendo a aresta do cubo em questão, tem-se que sua área e volume são, respectivamente*

$$A(x) = 6x^2$$

$$V(x) = x^3$$

*Derivando ambas as funções em relação ao tempo, teremos*

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt} \tag{4}$$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \tag{5}$$

*De acordo com o enunciado do problema temos que*

$$\frac{dV}{dt} = 10cm^3/\min$$

*quando $x = 30cm$. Assim, usando estas informações na equação (5) teremos*

$$10 = 3 \cdot 30^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{270} cm/\min$$

*Usando agora a equação (4),*

$$\frac{dA}{dt} = 12 \cdot 30 \frac{1}{270}$$

$$= \frac{4}{3} cm^2/\min$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma MX**

**Prof$^{o}$. Edson**

**3$^{a}$ Prova** | **2$^{o}$ Semestre** | **2015**

**Data: Quinta-feira, 17 de Março de 2016** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

**a).** $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$;

**b).** $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

**Problema 2** *Considere o polinômio* $p(x) = x(x^2 - 1)^2$

**a).** *Faça o estudo de crescimento de* $p(x)$;

**b).** *Determine e classifique os pontos críticos de* $p(x)$.

**Problema 3** *Determine o retângulo de área máximo, inscrito no triângulo retângulo de lados* 6, 8 *e* 10 *cm*.

**Problema 4** *Calcule as integrais:*

**a).** $\displaystyle\int \frac{1-2t^3}{t^3}\,dt$;

**b).** $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$.

**Problema 5** *Determine a área da região delimitada pela curva* $y = \operatorname{sen} x$ *e a reta que passa pelos pontos* $(0,0)$ *e* $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2015**
**Data: Segunda-feira, 28 de Março** **Turma MX**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\,(regra\,de\,L'Hospital)$$

$$= 0$$

$\square$

**b).** *Observe agora, que*

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}}\,(regra\,de\,L'Hospital)$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{e^x+1}{e^x+x}}$$

$$= e^2$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Sendo*

$$p(x) = x\left(x^2-1\right)^2$$

*Temos que*

$$p'(x) = \left(x^2-1\right)^2 + x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x$$

$$= \left(x^2-1\right)^2 + 4x^2(x^2-1)$$

$$= (x^2-1)\left[(x^2-1)+4x^2\right]$$

$$= (x^2-1)(5x^2-1)$$

*Além disso,*

$$p''(x) = 2x\cdot(5x^2-1) + (x^2-1)\cdot 10x$$

$$= 10x^3 - 2x + 10x^3 - 10x$$

$$= 20x^3 - 12x$$

**a).** *Observe que* $x = -1, 1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$ *são as raízes de* $p'(x)$. *Realizando o estudo de sinalde* $p'(x)$ *descobriremos que*

$$p'(x) > 0\,para\;x \in (-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup(1,+\infty)$$

$$p'(x) < 0\;\;para\;x \in \left(-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}},1\right)$$

*Donde segue-se que*

$p(x)$ *é crescente em* $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup(1,+\infty)$

$p(x)$ *é decrescente em* $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}},1\right)$

$\square$

**b).** *Fazendo*

$$p'(x) = 0$$

*ou seja,*

$$(x^2-1)(5x^2-1) = 0$$

*Obtemos como candidatos a extremos de* $p(x)$ *os valores*

$$x = -1, 1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$$

*Para classificá-los, observe que*

$$p''(-1) = -20 + 12 = -8 < 0$$

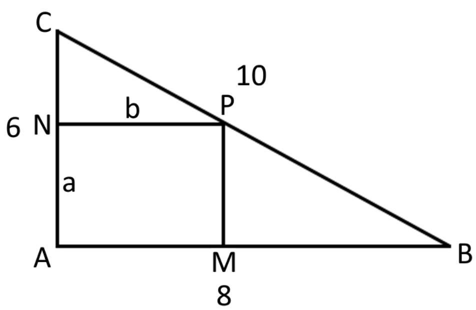
$$p''(1) = 20 - 12 = 8 > 0$$

$$p''\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} > 0$$

$$p''\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = -\frac{8}{\sqrt{5}} < 0$$

*Portanto,* $-1$ *e* $\frac{1}{\sqrt{5}}$ *são máximos locais enquanto* $1$ *e* $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ *são mínimos locais.* ■

**Exercício 3** *Chamemos de* $a$ *e* $b$ *as dimensões do retângulo procurado, conforme esboçado na figura abaixo.*




*Observe que os triângulos* $\Delta MBP$ *e* $\Delta NPC$ *são semelhantes, uma vez que todos os ângulos correspondentes são congruentes. Assim, segue-se que*

$$\frac{MB}{MP} = \frac{NP}{NC}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{8-b}{a} = \frac{b}{6-a}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$4a + 3b = 24$$

*A área do retângulo é dada por*

$$A(a,b) = ab$$

*mas,*

$$b = \frac{24 - 4a}{3}$$

*Ou seja*

$$A(a) = \frac{1}{3}\left(24a - 4a^2\right)$$

*Assim*

$$A'(a) = \frac{1}{3}(24 - 8a)$$

*e*

$$A'(a) = 0 \Rightarrow a = 3$$

*Além disto, temos que*

$$A''(a) = -\frac{8}{3} < 0$$

*Portanto,* $a = 3$ *é um valor máximo para* $A$ *e as dimensões procuradas são*

$$a = 3$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{24 - 4 \cdot 3}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

**Exercício 4**

**a).**

$$\begin{aligned} \int \frac{1-2t^3}{t^3}dt &= \int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2t^3}{t^3}\right) dt \\ &= \int \left(t^{-3} - 2\right) dt \\ &= -\frac{t^{-2}}{2} - 2t + k,\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

**b).**

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cos x\, dx \\ &= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x\, dx \\ &= \int \cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k,\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5**

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(\operatorname{sen} x - \frac{3}{5\pi}x\right) dx \\ &= \left(-\cos x - \frac{3}{5\pi}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \left(-\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{3}{5\pi}\frac{1}{2}\frac{5\pi}{6}\frac{5\pi}{6}\right) - (-\cos 0 - 0) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{24} \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma MX**

**Prof$^o$. Edson**

**Prova Final** **2$^o$ Semestre** **2015**

**Data: 31 de Março de 2016** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

**a).** $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln x - \ln(1+x)]$;

**b).** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \operatorname{sen} x}{3x + \operatorname{sen} x}$.

**Problema 2** *Calcule a derivada da função*

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen} x \sec x}\right)$$

**Problema 3** *Uma partícula está se movendo ao longo da hipérbole $xy = 8$. Quando atinge o ponto $(4, 2)$ a coordenada $y$ está decrescendo a uma taxa de $3\,cm/s$. Quão rápido a coordenada $x$ deste ponto está variando neste momento?*

**Problema 4** *Um poster deve ter uma área de $900\,cm^2$ com margem de $3\,cm$ na parte inferior e nas laterais e $5\,cm$ na parte superior. Quais dimensões permitem a maior área impressa?.*

**Problema 5** *Determine a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente a esta parábola no ponto $(1, 1)$ e pelo eixo $x$.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**2$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2015**
**Data: Sexta-feira, 1 de Abril** **Turma MX**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln(1+x) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{x}{1+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{1} \,(L'Hospital)$$

$$= \ln 1$$

$$= 0$$

□

**b).** *Observe agora, que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{3x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(3 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{3 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{2-1}{3+1}$$

$$= \frac{1}{4}$$

■

**Exercício 2** *Sendo*

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen} x \sec\, x}\right)$$

*Observe que*

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen} x \sec\, x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen} x \frac{1}{\cos x}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{tg} x}\right)$$

*Usando as propriedades do logaritmo, segue-se que*

$$f(x) = \ln \sqrt{x}\sqrt[3]{x+1} - \ln \operatorname{tg} x$$

$$= \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt[3]{x+1} - \ln \operatorname{tg} x$$

$$= \ln x^{\frac{1}{2}} + \ln (x+1)^{\frac{1}{3}} - \ln \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln (x+1) - \ln \operatorname{tg} x$$

*Portanto*

$$f'(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3\,(x+1)} - \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \frac{1}{2x} + \frac{1}{3\,(x+1)} - \sec x \cos\sec x$$

■

**Exercício 3** *Sabe-se que a partícula move-se sobre a curva $xy = 8$. Assim, temos que as coordenadas $x$ e $y$ desta partícula mudam com o tempo. Assim, derivando implicitamente, teremos*

$$\frac{d}{dt}(xy) = \frac{d}{dt}(8)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} = 0$$

*Também é informado no problema que a coordenada y da partícula está decrescendo a uma taxa de* $3\,cm/s$ *quando atinge o ponto* $(4,2)$, *ou seja*

$$\frac{dy}{dt} = -3\,cm/s$$

*Com isto segue-se que, neste instante teremos*

$$\frac{dx}{dt}2 + 4\,(-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = 6\,cm/s$$

■

**Exercício 4** *Sejam b e h as dimensões do retângulo que desejamos encontrar, sendo b a base e h a altura. Do enunciado, segue-se que*

$$b \cdot h = 900$$

*Dado que as margens inferior e laterais devem ter* $3\,cm$ *e a superior* $5\,cm$, *segue-se que a área de impressão será de*

$$A(b,h) = (b-6)(h-8)$$

*Mas, da equação anterior, temos que*

$$h = \frac{900}{b}$$

*Assim,*

$$A(b) = (b-6)\left(\frac{900}{b} - 8\right)$$

*e disto, temos*

$$A'(b) = \frac{5400}{b^2} - 8$$

*e*

$$A''(b) = -\frac{10800}{b^3}$$

*Para encontrarmos os candidatos a extremo da função A devemos resolver a seguinte equação*

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5400}{b^2} - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$b = \sqrt{675} \Leftrightarrow$$

$$b = 15\sqrt{3}$$

*Observe ainda que*

$$h = \frac{900}{b}$$

$$= 20\sqrt{3}$$

*e, além disto*

$$A''(b) = -\frac{10800}{\left(15\sqrt{3}\right)^3} < 0$$

*O que confirma que as dimensões* $b = 15\sqrt{3}$ *e* $h = 20\sqrt{3}$*de fato maximizam a área de impressão do poster em questão.* ■

**Exercício 5** *Observe que*

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

*e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $y = x^2$ *no ponto* $(1,1)$ *é, portanto*

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 2$$

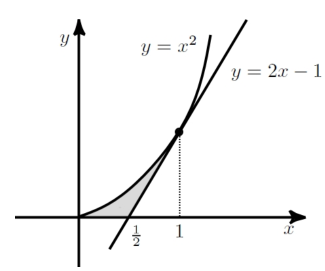
*e a equação desta reta será*

$$(y-1) = 2(x-1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y = 2x - 1$$

*Observe que esta reta intersepta o eixo no ponto onde*

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

*Realizando um esboço da região que desejamos calcular a área, teremos a seguinte figura*




*Ou seja*

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[x^2 - (2x-1)\right] dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{2}} + \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{24} + \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{12}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1ª Prova** **1º Semestre** **2017**

**Data: Quinta-feira, 03 de Agosto** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$

**b).** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

**Problema 2** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 5} \frac{10^x - 10^5}{x-5}$$

**Problema 3** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

**Problema 4** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to p} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x-p}$$

**Problema 5** *Determine todos os valores de $x$ para os quais a função*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}, & se\ \ |x| < 1 \\ x, & se\ \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

*é contínua.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2017**
**Data: Segunda-feira, 7 de Agosto** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Deseja-se resolver o seguinte limite*

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$$

*Para isto, considere a seguinte mudança de variável*

$$u = x - 1$$

*e observe que*

$$x = u + 1$$

*e*

$$x \to 1 \Rightarrow u \to 0$$

*Substituindo no limite dado, tem-se*

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-(u+1)^2}{\operatorname{sen}\,[\pi(u+1)]}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-u^2-2u-1}{\operatorname{sen}\,(\pi u+\pi)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-u(u+2)}{\operatorname{sen}\,(\pi u)\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos(\pi u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-u(u+2)}{-\operatorname{sen}\,(\pi u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} (u+2)\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\,(\pi u)}{u}}$$

$$= \lim_{u\to 0} (u+2)\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\,(\pi u)}{\pi u}\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

□

**b).** *Deseja-se resolver oseguinte limite*

$$B = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{5}}-1}$$

*Para isto, considere uma mudança de variável tal que*

$$x = u^{15}$$

*ou seja,*

$$u = \sqrt[15]{x} = x^{\frac{1}{15}}$$

*e*

$$x \to 1 \Rightarrow u \to 1$$

*Portanto,*

$$B = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{5}}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{\left(u^{15}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(u^{15}\right)^{\frac{1}{5}}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^{\frac{15}{3}}-1}{u^{\frac{15}{5}}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^5-1}{u^3-1}$$

*Observe que*

$$u^5 - 1 = (u-1)\left(u^4+u^3+u^2+u+1\right)$$

$$u^3 - 1 = (u-1)\left(u^2+u+1\right)$$

*Assim,*

$$B = \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)\left(u^4+u^3+u^2+u+1\right)}{(u-1)\left(u^2+u+1\right)}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^4+u^3+u^2+u+1}{u^2+u+1}$$

$$= \frac{5}{3}$$

■

**Exercício 2** *Para resolver o limite*

$$\lim_{x\to 5}\frac{10^x-10^5}{x-5}$$

*considere*

$$u=x-5$$

*e observe que,*

$$x\to 5\Rightarrow u\to 0$$

*e*

$$x=u+5$$

*Logo*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{10^x-10^5}{x-5}&=\lim_{u\to 0}\frac{10^{(u+5)}-10^5}{u}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{10^u10^5-10^5}{u}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{10^5\left(10^u-1\right)}{u}\end{aligned}$$

*Considere agora,*

$$w=10^u-1$$

*e observe que,*

$$u\to 0\Rightarrow w\to 0$$

*e*

$$u=\log_{10}(w+1)$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{10^x-10^5}{x-5}&=\lim_{u\to 0}\frac{10^5\left(10^u-1\right)}{u}\\&=10^5\lim_{w\to 0}\frac{w}{\log_{10}(w+1)}\\&=10^5\lim_{w\to 0}\frac{1}{\frac{1}{w}\log_{10}(w+1)}\\&=10^5\lim_{w\to 0}\frac{1}{\log_{10}(w+1)^{\frac{1}{w}}}\\&=10^5\frac{1}{\log_{10}e}\\&=10^5\ln 10\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Considere*

$$C=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$$

*e observe inicialmente que*

$$1-x^3=(1-x)\left(x^2+x+1\right)$$

*Ou seja*

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\end{aligned}$$

*Perceba que*

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

*Logo,*

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)(x+2)}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{x^2+x+1}\\&=-1\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 4** *Considere*

$$D=\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}$$

*Para resolver este limite tome*

$$u=\sqrt[n]{x}$$

*donde segue-se que*

$$x=u^n$$

*e*

$$x\to p\Rightarrow u\to\sqrt[n]{p}$$

*e retornando ao limite tem-se*

$$\begin{aligned}D&=\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}\\&=\lim_{u\to\sqrt[n]{p}}\frac{u-\sqrt[n]{p}}{u^n-p}\end{aligned}$$

*Observe que*

$$u^n - p = (u - \sqrt[n]{p})\Big(u^{n-1} + u^{n-2}\sqrt[n]{p} + u^{n-3}\sqrt[n]{p^2} + \cdots + u^2\sqrt[n]{p^{n-3}} + u\sqrt[n]{p^{n-2}} + \sqrt[n]{p^{n-1}}\Big)$$

*Ou seja*

$$\begin{aligned} D &= \lim_{u\to\sqrt[n]{p}} \frac{u-\sqrt[n]{p}}{u^n - p} \\ &= \lim_{u\to\sqrt[n]{p}} \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}\sqrt[n]{p} + \cdots + \sqrt[n]{p^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{p^{n-1}} + \cdots + \sqrt[n]{p^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{n\sqrt[n]{p^{n-1}}} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Inicialmente perceba que a função*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & se\ |x| < 1 \\ x, & se\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

*pode ser reescrita como*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\, x \leq -1 \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & se\ -1 < x < 1 \\ x, & se\, x \geq 1 \end{cases}$$

*A continuidade de $f$ deve ser analisada em cada um dos intervalos em que suas sentenças estão definidas, além dos encontros destes.*

- *Para $x \leq -1$, $f(x) = x$, ou seja $f$ é polinomial e portanto contínua neste intervalo;*
- *Para $-1 < x < 1$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \end{aligned}$$

  *Como as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) \neq 0$ quando $-1 < x < 1$, segue-se que $f$ é também contínua neste intervalo;*

- *Para $x \geq 1$, $f(x) = x$, ou seja $f$ é novamente polinomila e portanto contínua neste intervalo.*

- *Para $x = -1$, tem-se que*

  *i). $f(-1) = -1$, ou seja $f(-1)$ existe;*

  *ii).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} x \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

  *Ou seja*

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1$$

  *iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que*

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

  *Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função $f$ em $x = -1$.*

- *Para $x = 1$, tem-se que*

  *i). $f(1) = 1$, ou seja $f(1)$ existe;*

  *ii).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} x \\ &= 1 \end{aligned}$$

  *Ou seja*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

  *iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

  *Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função $f$ em $x = 1$.*

*Segue-se portanto, que $f$ contínua em $\mathbb{R}$.* ■.

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{a}$ Prova** **1$^{o}$ Semestre** **2017**

**Data: Quinta-feira, 14 de Setembro** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada das funções:*

**a).** $f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)$

**b).** $g(x) = \left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{17}$

**Problema 2** *Dado que* $f(-2) = 3$ *e* $f'(-2) = -4$ *encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *no ponto em que* $x = -2$.

**Problema 3** *Mostre que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

*é contínua mas não diferenciável em* $x = 0$.

**Problema 4** *Dado que* $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *e* $g(x) = \sqrt{3x-1}$, *encontre* $F'(x)$ *sabendo que* $F(x) = f(g(x))$.

**Problema 5** *Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$ *sabendo que*

$$x^3 + x\,\mathrm{arctg}\,y = e^y$$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**1º Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2017**
**Data: Sexta-feira, 9 de Março** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Sendo*

$$f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)$$

*Segue-se, da* ***regra do produto****, que*

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)'\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\left[\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)\right]'$$

*Observe que*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

*e*

$$\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) = p(q(x))$$

*onde*

$$\begin{cases} p(x) = \mathrm{tg}^3 x \\ q(x) = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'(x) = 3\mathrm{tg}^2 x\, \sec^2 x \\ q'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

*Assim, usando a* ***regra da cadeia****, tem-se que*

$$\begin{aligned}\left[\left[\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)\right]'\right] &= p'(q(x))q'(x) \\ &= 3\mathrm{tg}^2 q(x)\,\sec^2 q(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3}{2}\frac{\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

*Portanto*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\sqrt{x}\right)'\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\left[\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)\right]' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\frac{3}{2}\frac{\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \frac{3}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}\end{aligned}$$

□

**b).** *Observe que*

$$\begin{aligned}g(x) &= \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{17} \\ &= p(q(x))\end{aligned}$$

*sendo*

$$\begin{cases} p(x) = x^{17} \\ q(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} \end{cases}$$

*Donde segue-se que*

$$p'(x) = 17x^{16}$$

*e usando a* ***regra do quociente****,*

$$\begin{aligned}q'(x) &= \frac{\left(1+x^2\right)'\left(1-x^2\right) - \left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} \\ &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{4x}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned}g'(x) &= p'(q(x))q'(x) \\ &= 17\left(q(x)\right)^{16}\frac{4x}{(1-x^2)^2} \\ &= 17\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{16}\frac{4x}{(1-x^2)^2} \\ &= 68x\frac{(1+x^2)^{16}}{(1-x^2)^{18}}\end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Sabendo-se que*

$$f(-2) = 3$$

*e*

$$f'(-2) = -4$$

*Conclui-se que a reta tangente ao gráfico de $f$ para $x = -2$, passa pelo ponto*

$$(x_0, y_0) = (-2, 3)$$

*e possui coeficiente angular*

$$m = -4$$

*Assim, sua equação é dada por*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$y - 3 = -4(x + 2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$y = -4x - 5$$

■

**Exercício 3** *Para verificar a continuidade de $f$ em $x = 0$, observe que*

**i)** $f(0) = 0$, *ou seja $f(0)$ existe.*

**ii)**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

*Visto que $x \to 0$ e $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$.*

**iii)** *Pelos itens anteriores, tem-se que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

*Segue-se dos itens (i), (ii) e (iii) que $f$ é contínua em $x = 0$.*

*Por outro lado, observe que*

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \nexists \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Sabendo-se que*

$$F(x) = f(g(x))$$

*segue-se da **regra da cadeia** que*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

*Como*

$$f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

*e*

$$g(x) = \sqrt{3x - 1}$$

*Tem-se que*

$$\begin{aligned} f'(g(x)) &= \frac{g(x)}{(g(x))^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x - 1 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x} \end{aligned}$$

*e*

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

*Portanto*

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x} \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} \\ &= \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Sabe-se que*

$$x^3 + x \operatorname{arctg} y = e^y$$

*Derivando implicitamente em relação a $x$, tem-se*

$$3x^2 + \operatorname{arctg} y + x\,(\operatorname{arctg} y)' \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

*Lembre-se que*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x & \Rightarrow \\ \sec^2(\operatorname{arctg} x)\,(\operatorname{arctg} x)' &= 1 & \Rightarrow \\ (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)} & \Rightarrow \\ (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} & \Rightarrow \\ (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

*Assim,*

$$\begin{aligned} 3x^2 + \operatorname{arctg} y + x\,(\operatorname{arctg} y)' \frac{dy}{dx} &= e^y \frac{dy}{dx} & \Rightarrow \\ x\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} - e^y \frac{dy}{dx} &= -3x^2 - \operatorname{arctg} y & \Rightarrow \\ \left[\frac{x}{1+y^2} - e^y\right]\frac{dy}{dx} &= -3x^2 - \operatorname{arctg} y & \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-3x^2 - \operatorname{arctg} y}{\frac{x}{1+y^2} - e^y} \end{aligned}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof$^{o}$. Edson**

**3ª Prova** | **1º Semestre** | **2017**

**Data: Terça-feira, 17 de Outubro** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \cos 2x}$

**b).** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

**Problema 2** *Um ponto $P$ move-se ao longo de uma curva cuja equação é*

$$y = \sqrt{x^3 + 17}$$

*Quando $P$ está em $(2, 5)$, $y$ está crescendo a uma taxa de 2 unidades por segundo. Com que rapidez $x$ está variando?*

**Problema 3** *Considere a função*

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 4}$$

**a).** *Realize o estudo de crescimento de $f$;*

**b).** *Realize o estudo de concavidade de $f$.*

**Problema 4** *Qual a distância vertical mínima entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$.*

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = |x|$ e $y = x^2 - 2$.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2017**
**Data: Sexta-feira, 20 de Outubro** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que, para este limite, tem-se uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Assim, aplicando a* ***regra de L'Hospital****, tem-se*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\cos 2x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-2\operatorname{sen}2x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\operatorname{sen}x}{4\cos 2x}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

□

**b).** *Observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)\frac{x+\ln x}{x+\ln x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(\ln x)^2}{x+\ln x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\ln x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}\end{aligned}$$

*Usando a* ***regra de L'Hospital****, tem-se que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\ln x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+\frac{1}{x}}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\frac{x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\ln x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}\\ &= +\infty-0\\ &= +\infty\end{aligned}$$

***(De outro modo)***

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) &= \lim_{x\to+\infty}(\ln e^x-\ln x)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{1}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\ln e^x\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Sabendo-se que*

$$y=\sqrt{x^3+17}$$

*tem-se, derivando implicitamente em relação a $t$ em ambos os lados, que*

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{x^3+17}}3x^2\frac{dx}{dt}$$

*Então, para $x=2$, $y=5$ e $\frac{dy}{dt}=2$, conclui-se que*

$$2=\frac{1}{2\sqrt{8+17}}12\frac{dx}{dt}$$

*Ou seja,*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5}{3}$$

■

**Exercício 3** *Sendo*

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2+4}$$

*segue-se que*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} 2x$$

$$= \frac{x}{x^2+4}$$

$$f''(x) = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

**a).** *Para realizar o estudo de crescimento de $f$, deve-se realizar o estudo de sinal da fução $f'$. Para isto, observe que $x^2+4>0$, $\forall x \in R$. Assim,*

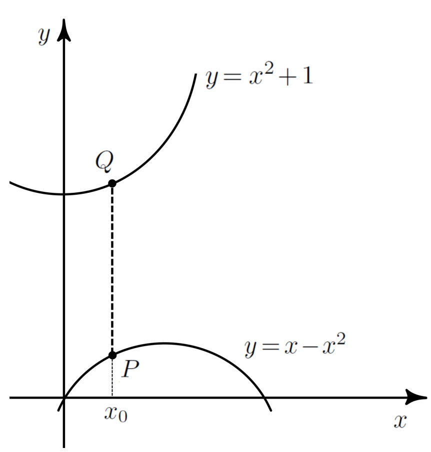
*$f(x)$ é crescente para $x \in (0,+\infty)$*
*$f(x)$ é decrescente para $x \in (-\infty, 0)$*

**b).** *Para o estudo de concavidade de $f$ é necessário realizar o estudo de sinal da função $f''$. Observando que $\left(x^2+4\right)^2 > 0$ e realizando o estudo de sinal do polinômio $-x^2+4$, tem-se que*

*$f(x)$ é côncava para cima em $(-2,2)$*
*$f(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$*

■

**Exercício 4** *Seja $x_0$ a abcissa do ponto sobre a parábola $y = x - x^2$, ou seja $P = (x_0, x_0 - x_0^2)$. Como trata-se de uma distância vertical, o ponto correspondente sobre a parábola $y = x^2+1$ será $Q = (x_0, x_0^2+1)$.*




*Calculando a distância entre $P$ e $Q$ obtêm-se*

$$f(x_0) = dPQ$$

$$= \sqrt{(x_0^2+1-x_0+x_0^2)^2}$$

$$= 2x_0^2 - x_0 + 1$$

*Para encontrar um extremo desta função é necessário resolver a seguinte equação*

$$f'(x_0) = 0$$

*Ou seja,*

$$4x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$$

*Observe que*

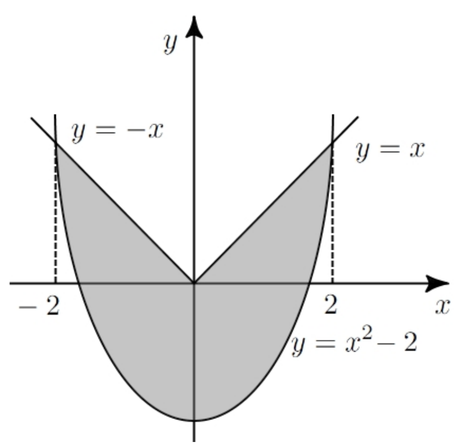
$$f''(x_0) = 4 > 0$$

*O que permite afirmar que $x_0 = \dfrac{1}{4}$ é um ponto de mínimo e a distância procurada é, portanto*

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

■

**Exercício 5** *Realizando um esboço da região em questão, obtem-se o seguinte esboço*




*Assim, a área desta região é dada por*

$$A = \int_{-2}^{0} \left[-x - (x^2-2)\right] dx + \int_{0}^{2} \left[x - (x^2-2)\right] dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= 0 - \left(-\frac{4}{2} + \frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - 0$$

$$= \frac{20}{3}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof°. Edson**

**Prova Final** **1° Semestre** **2017**

**Data: Terça-feira, 24 de Outubro** **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \cos 2x}$

**b).** $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

**Problema 2** *Determine todos os valores de $x$ para os quais a função*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}, & se \ |x| < 1 \\ x, & se \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

*é contínua.*

**Problema 3** *Dado que* $f'(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ *e* $g(x) = \sqrt{3x - 1}$, *encontre* $F'(x)$ *sabendo que* $F(x) = f(g(x))$.

**Problema 4** *Qual a distância vertical mínima entre as parábolas* $y = x^2 + 1$ *e* $y = x - x^2$.

**Problema 5** *Calcule a área da região delimitada pelas curvas* $y = |x|$ *e* $y = x^2 - 2$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof°. Edson**

**1° Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2017**
**Data: Terça-feira, 24 de Outubro** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que, para este limite, tem-se uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Assim, aplicando a **regra de L'Hospital**, tem-se*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2\operatorname{sen} 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen} x}{4\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\square$

**b).** *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)\frac{x+\ln x}{x+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+\ln x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

*Usando a **regra de L'Hospital**, tem-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= +\infty$$

*e*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x+\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x}\,\frac{x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1}$$

$$= 0$$

*Assim,*

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+\ln x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

$$= +\infty - 0$$

$$= +\infty$$

***(De outro modo)***

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln e^x - \ln x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x$$

$$= +\infty$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Inicialmente perceba que a função*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & se\ |x|<1 \\ x, & se\ |x|\geq 1 \end{cases}$$

*pode ser reescrita como*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\, x \leq -1 \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & se\ -1<x<1 \\ x, & se\, x\geq 1 \end{cases}$$

*A continuidade de $f$ deve ser analisada em cada um dos intervalos em que suas sentenças estão definidas, além dos encontros destes.*

- *Para $x \leq -1$, $f(x) = x$, ou seja $f$ é polinomial e portanto contínua neste intervalo;*

- *Para* $-1 < x < 1$,

$$f(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

*Como as funções* $\text{sen}\, x$ *e* $\cos x$ *são contínuas para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \neq 0$ *quando* $-1 < x < 1$*, segue-se que* $f$ *é também contínua neste intervalo;*

- *Para* $x \geq 1$, $f(x) = x$*, ou seja* $f$ *é novamente polinomila e portanto contínua neste intervalo.*

- *Para* $x = -1$*, tem-se que*

  *i).* $f(-1) = -1$*, ou seja* $f(-1)$ *existe;*

  *ii).*

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x = -1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \text{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

*Ou seja*

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1$$

*iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que*

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

*Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função* $f$ *em* $x = -1$.

- *Para* $x = 1$*, tem-se que*

  *i).* $f(1) = 1$*, ou seja* $f(1)$ *existe;*

  *ii).*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \text{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1$$

*Ou seja*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

*iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função* $f$ *em* $x = 1$.

*Segue-se portanto, que* $f$ *contínua em* $\mathbb{R}$. ■.

**Exercício 3** *Sabendo-se que*

$$F(x) = f(g(x))$$

*segue-se da* ***regra da cadeia*** *que*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

*Como*

$$f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

*e*

$$g(x) = \sqrt{3x-1}$$

*Tem-se que*

$$f'(g(x)) = \frac{g(x)}{(g(x))^2+1} = \frac{\sqrt{3x-1}}{3x-1+1} = \frac{\sqrt{3x-1}}{3x}$$

*e*

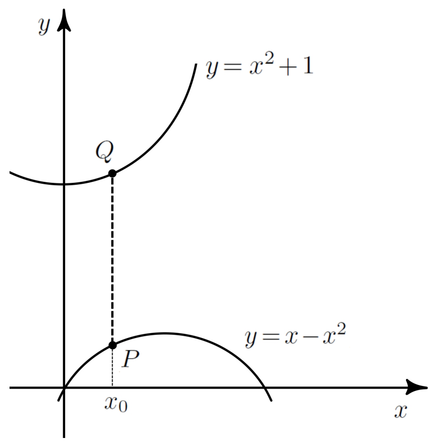
$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

*Portanto*

$$F'(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{3x}\frac{3}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{1}{2x}$$

■

**Exercício 4** *Seja $x_0$ a abcissa do ponto sobre a parábola $y = x - x^2$, ou seja $P = (x_0, x_0 - x_0^2)$. Como trata-se de uma distância vertical, o ponto correspondente sobre a parábola $y = x^2 + 1$ será $Q = (x_0, x_0^2 + 1)$.*




*Calculando a distância entre $P$ e $Q$ obtêm-se*

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= dPQ \\
&= \sqrt{(x_0^2 + 1 - x_0 + x_0^2)^2} \\
&= 2x_0^2 - x_0 + 1
\end{aligned}
$$

*Para encontrar um extremo desta função é necessário resolver a seguinte equação*

$$f'(x_0) = 0$$

*Ou seja,*

$$4x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$$

*Observe que*

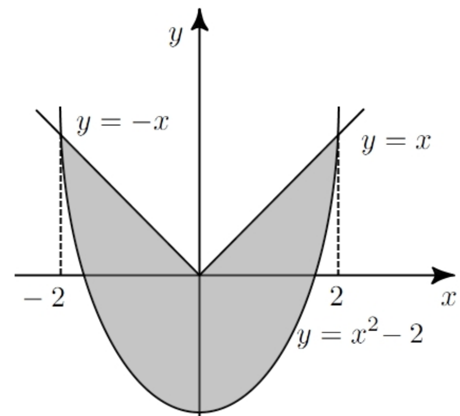
$$f''(x_0) = 4 > 0$$

*O que permite afirmar que $x_0 = \dfrac{1}{4}$ é um ponto de mínimo e a distância procurada é, portanto*

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

■

**Exercício 5** *Realizando um esboço da região em questão, obtem-se o seguinte esboço*




*Assim, a área desta região é dada por*

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} \left[-x - (x^2 - 2)\right] dx + \int_{0}^{2} \left[x - (x^2 - 2)\right] dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{0}^{2} \\
&= 0 - \left(-\frac{4}{2} + \frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - 0 \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma A1**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1$^{\text{a}}$ Prova** **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2017**

**Data: Quinta-feira, 01 de Fevereiro de 2018** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+4x+3}$

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

**Problema 2** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^x-2^x}{x}$$

**Problema 3** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$

**Problema 4** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{2x-\pi}$$

**Problema 5** *Determine todos o valore da constante c para que a função*

$$f(x) = \begin{cases} c\,x+1, & se\ x \leq 3 \\ c\,x^2-1, & se\ x > 3 \end{cases}$$

*seja contínua em* $x = 3$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2017**
**Data: Domingo, 11 de Fevereiro de 2018** **Turma A1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Inicialmente observe que*

$$x \to -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \to 6$$

*e*

$$x \to -1^+ \Rightarrow x^2 + 4x + 3 \to 0^+$$
$$x \to -1^- \Rightarrow x^2 + 4x + 3 \to 0^-$$

*Assim,*

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$$

*e*

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$$

*Ou seja,*

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \nexists$$

□

**b).** *Considere*

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$$

*e observe que*

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}{x^2 + 3 - 4} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}{(x - 1)(x + 1)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{x + 1} \\
&= \frac{4}{2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Deseja-se resolver o limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$$

*Para isto, observe inicialmente que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{6^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \to 0} 2^x \frac{\frac{6^x}{2^x} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} 2^x \frac{\left(\frac{6}{2}\right)^x - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} 2^x \frac{3^x - 1}{x} \\
&= A \cdot B
\end{aligned}$$

*Sendo*

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \to 0} 2^x \\
&= 1
\end{aligned}$$

*e*

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x}$$

*Para a resolução de $B$, considere*

$$u = 3^x - 1$$

*e observe que*

$$x = \log_3 (u + 1)$$

$$x \to 0 \Rightarrow u \to 0$$

*Ou seja*

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\log_3 (u + 1)} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \log_3 (u + 1)} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{1}{\log_3 (u + 1)^{\frac{1}{u}}}
\end{aligned}$$

*Como*

$$\lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}=e,$$

*segue-se que*

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\log_3 e} \\ &= \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln 3}} \\ &= 1\cdot\frac{\ln 3}{\ln e} \\ &= \ln 3 \end{aligned}$$

*e*

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x}=A\cdot B=\ln 3$$

■

**Exercício 3** *Considere*

$$C=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$

*e observe que*

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3^{-x}\left(3^{2x}-1\right)}{3^{-x}\left(3^{2x}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \end{aligned}$$

*Sabendo que*

$$x\to-\infty\Rightarrow 3^{2x}\to 0$$

*tem-se que*

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \\ &= \frac{-1}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Deseja-se calcular o seguinte limite*

$$D=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}x}{2x-\pi}$$

*Considere a seguinte mudança de variável*

$$u=x-\frac{\pi}{2}$$

*donde segue-se que*

$$x=u+\frac{\pi}{2}$$

*e*

$$x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 0$$

*Retornando ao limite tem-se*

$$\begin{aligned} D &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(u+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}u\cos\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos u}{2u} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{2u} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{2u}\,\frac{1+\cos u}{1+\cos u} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos^2 u}{2u\left(1+\cos u\right)} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 u}{2u\left(1+\cos u\right)} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,\frac{\operatorname{sen}u}{2\left(1+\cos u\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Considere a função*

$$f(x)=\begin{cases} cx+1, & se\, x\le 3 \\ cx^2-1, & se\, x>3 \end{cases}$$

*Para que $f$ seja contínua em $x=3$, é necessário que*

*i). $f(3)$ exista. Observe no entanto, que $f(3)=c\cdot 3+1=3c+1$. Ou seja, se existir $c$, $f(3)$ existe também.*

*ii). $\lim_{x\to 3}f(x)$ exista. Observe que*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^{+-}}f(x) &= \lim_{x\to 3^{+-}}cx^2-1 \\ &= 9c-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3^{-}}f(x) &= \lim_{x\to 3^{-}}cx+1 \\ &= 3c+1 \end{aligned}$$

*Assim, é necessário que*

$$\lim_{x\to 3^{+-}} f(x) = \lim_{x\to -3^{-}} f(x) \Leftrightarrow$$
$$9c - 1 = 3c + 1 \Leftrightarrow$$
$$c = \frac{1}{3}$$

*Portanto, existe c tal que o limite existe, o que torna este item verdadeiro além do anterior.*

*iii). Por fim, é necessário que*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

*Dos itens (i), (ii), sabe-se que*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 3c + 1 = 9c - 1 = 2$$

*e*

$$f(3) = 3c + 1 = 2$$

*Assim, tem-se o que desejava-se.*

*Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função $f$ em $x = 3$ para $c = \frac{1}{3}$.* $\blacksquare$.

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma A1**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2ª Prova** | **2º Semestre** | **2017**

**Data: Quinta-feira, 08 de Março de 2018** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule a derivada das funções*

**a).** $f(x) = 2^{\operatorname{sen}\pi x}$

**b).** $y = \sqrt{\dfrac{t}{4+t^2}}$

**Problema 2** *Considere a função*

$$f(x) = |2x+4| + 3$$

*Determine onde esta função é derivável e onde não é. Justifique sua resposta.*

**Problema 3** *Seja* $f(x) = ax^2 + bx$. *Encontrar os valores de* $a$ *e* $b$, *sabendo que a tangente à curva no ponto* $(1,5)$ *possui inclinação* $m = 8$.

**Problema 4** *Dadas as funções* $f(x) = x^2 + Ax$ *e* $g(x) = Bx$, *determinar* $A$ *e* $B$ *de tal forma que*

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2 \end{cases}$$

**Problema 5** *Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$ *em* $x = 4$ *sabendo que* $y(x)$ *é dada implicitamente através da equação*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**2º Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2017**
**Data: Sexta-feira, 9 de Março** **Turma A1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{\operatorname{sen}\pi x} \\ &= e^{\ln 2^{\operatorname{sen}\pi x}} \\ &= e^{\operatorname{sen}\pi x\ \ln 2} \end{aligned}$$

*Considere*

$$u(x) = \pi x$$

$$v(u) = \ln 2\, sen\, u$$

$$f(v) = e^v$$

*Assim,*

$$\frac{du}{dx} = \pi$$

$$\frac{dv}{du} = \ln 2\ \cos u$$

$$\frac{df}{dv} = e^v$$

*e, usando a* ***regra da cadeia****, tem-se que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dx} \\ &= \frac{df}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} \\ &= e^v \ln 2\ \cos u\, \pi \\ &= \pi \ln 2 \cos(\pi x) e^{\ln 2 \operatorname{sen}\pi x} \\ &= \pi \ln 2 \cos(\pi x) 2^{\operatorname{sen}\pi x} \end{aligned}$$

□

**b).** *Considere*

$$u(t) = \frac{t}{4+t^2}$$

*e observe que*

$$y(u) = \sqrt{u}$$

*Assim,*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{4+t^2 - t\,(2t)}{(4+t^2)^2} \\ &= \frac{4-t^2}{(4+t^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

*e, usando a* ***regra da cadeia****, tem-se*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{4-t^2}{(4+t^2)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{4+t^2}}}\frac{4-t^2}{(4+t^2)^2} \\ &= \frac{(4+t^2)^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}}\frac{4-t^2}{(4+t^2)^2} \\ &= \frac{4-t^2}{2t^{\frac{1}{2}}\,(4+t^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Inicialmente observe que*

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x+4| + 3 \\ &= \begin{cases} 2x+4+3, \ se\, 2x+4 \geq 0 \\ -(2x+4)+3, \ se\, 2x+4 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x+7, \ se\, x \geq -2 \\ -2x-1, \ se\, x < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

*Assim,*

- *para $x > -2$ tem-se $f(x) = 2x+7$. Portanto*

$$f'(x) = 2$$

- *para $x < -2$ tem-se $f(x) = -2x-1$ e disto segue-se que*

$$f'(x) = -2$$

- *para $x = -2$, tem-se*

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

*Perceba porém, que*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = 2$$

*e*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = -2$$

*ou seja,*

$$f'(-2) = \nexists$$

*Tem-se por fim que*

$$f'(x) = \begin{cases} 2, \; se\, x > -2 \\ -2, \; se\, x < -2 \\ \nexists, \; se\, x = -2 \end{cases}$$

■

**Exercício 3** *Sendo*

$$f(x) = ax^2 + bx$$

*segue-se que*

$$f'(x) = 2ax + b$$

*Como o gráfico da função $f$ passa pelo ponto $(1, 5)$, tem-se que*

$$f(1) = 5 \Leftrightarrow a + b = 5$$

*Sabe-se também que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1, 5)$ é $m = 8$, ou seja*

$$f'(1) = m \Leftrightarrow 2a + b = 8$$

*Para descobri-se os valores de $a$ e $b$ é necessário portanto, resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$$

*Donde segue-se que $a = 3$ e $b = 2$.* ■

**Exercício 4** *Derivando as funções dadas obtem-se*

$$f'(x) = 2x + A$$
$$g'(x) = B$$

*Substituindo no sistema dado tem-se*

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + A + B = 1 + 2x \\ x^2 + Ax - Bx = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (A + B) + 2x = 1 + 2x \\ (A - B)\, x + x^2 = x^2 \end{cases}$$

*Ou seja*

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

*donde segue-se que*

$$A = \frac{1}{2}$$
$$B = \frac{1}{2}$$

■

**Exercício 5** *Considerando $y$ como função de $x$ e* ***derivando implicitamente*** *a equação dada, tem-se*

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = \frac{d}{dx}(3) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

*Assim*

$$\frac{dy}{dx}(4) = -\sqrt{\frac{y(4)}{4}}$$

*Voltando à equação dada e substituindo $x = 4$ tem-se*

$$\sqrt{4} + \sqrt{y(4)} = 3 \Rightarrow y(4) = 1$$

*Portanto*

$$\frac{dy}{dx}(4) = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

*Obs.: Foram consideradas apenas as raízes quadradas positivas de todos os radicais envolvidos no problema, uma vez que ambos representam a função raíz quadrada e por conta da definição de função segue-se o impedimento de duas imagens para um mesmo valor da abcissa.* ■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma A1**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**3ª Prova** **2º Semestre** **2017**

**Data: Quinta-feira, 12 de Abril de 2018** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

**a).** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

**b).** $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

**Problema 2** *Uma partícula move-se ao longo da curva*

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

*Encontre todos os pontos $(x, y)$ sobre esta curva para os quais as taxas de variação de $x$ e $y$ em relação ao tempo são iguais. (Assuma que $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ nunca são nulas no mesmo ponto).*

**Problema 3** *Considere a função*

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+4}$$

**a).** *Faça o estudo de crescimento de $f$*

**b).** *Faça o estudo de concavidade de $f$.*

**Problema 4** *Um retângulo possui seus dois vértices inferiores sobre o eixo $x$ e os outros dois vértices sobre a curva*

$$y = 16 - x^2$$

*Dentre todos os possíveis retângulos construídos dessa forma, determine o retângulo de área máxima.*

**Problema 5** *Calcule a integral*

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\, dx$$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**2$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2017**
**Data: Sexta-feira, 13 de Abril de 2018** **Turma A1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sec^2 x}\,\textit{(\textbf{L'Hôpital})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos^3 x$$

$$= 1$$

□

**b).** *Considere*

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{e^x+1}{e^x+x}}\,\textit{(\textbf{L'Hôpital})}$$

$$= e^2$$

■

**Exercício 2** *Derivando-se implicitamente a equação da curva sobre a qual a partícula move-se, em relação ao tempo, obtem-se*

$$\frac{d}{dt}\left(16x^2+9y^2\right) = \frac{d}{dt}(144) \quad\Rightarrow$$

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dy}{dt} = 0$$

*Como deseja-se encontrar os pontos $(x,y)$ para os quais*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

*A equação anterior, ao substituir esta condição, torna-se*

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dx}{dt} = 0 \quad\Rightarrow$$

$$(32x+18y)\frac{dx}{dt} = 0 \quad\Rightarrow$$

$$32x+18y = 0,$$

*visto que* $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ *nos pontos procurados. Assim, segue-se que*

$$32x+18y = 0 \quad\Rightarrow$$

$$y = -\tfrac{32}{18}x \quad\Rightarrow$$

$$y = -\tfrac{16}{9}x$$

*Retornando à equação da curva, tem-se*

$$16x^2+9y^2 = 144 \quad\Rightarrow$$

$$16x^2+9\left(-\tfrac{16}{9}x\right)^2 = 144 \quad\Rightarrow$$

$$16x^2+\tfrac{9\cdot 16^2}{9\cdot 9}x^2 = 144 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{9\cdot 16x^2+16^2x^2}{9} = 144 \quad\Rightarrow$$

$$\tfrac{25\cdot 16}{9}x^2 = 144 \quad\Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{144\cdot 9}{25\cdot 16}} \quad\Rightarrow$$

$$x = \pm\tfrac{12\cdot 3}{5\cdot 4} \quad\Rightarrow$$

$$x = \pm\tfrac{9}{5}$$

*Quando* $x = -\frac{9}{5}$ *tem-se* $y = \frac{16}{5}$ *e quando* $x = \frac{9}{5}$ *tem-se* $y = -\frac{16}{5}$. *Portanto* $\left(-\frac{9}{5},\frac{16}{5}\right)$ *e* $\left(\frac{9}{5},-\frac{16}{5}\right)$ *são os pontos procurados.* ■

**Exercício 3** *Sendo*

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+4}$$

**a).** *Segue-se que*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} 2x$$
$$= \frac{x}{x^2+4}$$

*e como* $x^2 + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *segue-se que*

$$f'(x) > 0 \text{ quando } x > 0$$
$$f'(x) < 0 \text{ quando } x < 0$$

*Ou seja*

$$f \text{ é crescente para } x > 0$$
$$f \text{ é decrescente para } x < 0$$

□

**b).** *Derivando a expressão obtida para* $f'$ *tem-se*

$$f''(x) = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

*e como* $(x^2+4)^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *segue-se que*

$$f''(x) > 0 \text{ quando } -x^2+4 > 0$$
$$f''(x) < 0 \text{ quando } -x^2+4 < 0$$

*Ou seja*

$$f''(x) > 0 \text{ quando } -2 < x < 2$$
$$f''(x) < 0 \text{ quando } x < -2 \text{ ou } x > 2$$

*Portanto,* $f$ *possui concavidade para cima quando* $-2 < x < 2$ *e concavidade para baixo quando* $x < -2$ *ou* $x > 2$. ■

**Exercício 4** *Considere* $(x, 0)$ *sendo as coordenadas do vértice inferior direito do retângulo (sobre o eixo* $x$*). Por simetria segue-se que o outro vértice inferior possui coordenadas* $(-x, 0)$ *e disto segue-se que o retângulo construido dessa forma possui base de comprimento* $b = 2x$*. O vértice superior direito, por estar sobre a parábola* $y = 16 - x^2$ *e acima do vértice* $(x, 0)$*, terá coordenadas* $(x, 16 - x^2)$*, de modo que a altura do retângulo é* $h = 16 - x^2$*. Assim, a área do retângulo é*

$$A(x) = b \cdot h$$
$$= 2x\left(16 - x^2\right)$$
$$= -2x^3 + 32x$$

*Para encontrar-se os pontos candidatos a estremos de* $A$ *é necessário resolver a seguinte equação*

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$-6x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$$

*Como* $x$ *deve ser um valor positivo, uma vez que* $2x = b$ *é um dos lados do retângulo, segue-se que o único candidato possível é*

$$x = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

*Para classificar este candidato, observe que*

$$A''(x) = -12x \Rightarrow$$
$$A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -12\sqrt{\frac{16}{3}} < 0$$

*Sendo possível, portanto, afirmar que* $x = \sqrt{\frac{16}{3}}$ *é um ponto de máximo para a função* $A(x)$*. Logo o retângulo procurado possui vértices* $\left(\sqrt{\frac{16}{3}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{16}{3}}, \frac{32}{3}\right), \left(-\sqrt{\frac{16}{3}}, \frac{32}{3}\right), \left(-\sqrt{\frac{16}{3}}, 0\right)$. ■

**Exercício 5** *Inicialmente observe que*

$$f(x) = |\cos x|$$
$$= \begin{cases} \cos x, & se \cos x \geq 0 \\ -\cos x, & se \cos x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

*Assim*

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} -\cos x dx$$
$$= \operatorname{sen} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\operatorname{sen} x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$
$$= \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right) + \left(-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma A1**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**Prova Final** **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2017**

**Data: Terça-feira, 17 de Abril de 2018** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

**a).** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$

**b).** $\lim_{x \to 2} \left( \frac{1}{2x-4} + \frac{1}{x-2} \right)$

**Problema 2** *Determine a reta normal à circunferência de centro* $(2, 0)$ *e raio* $2$*, nos pontos de abcissa 1.*

**Problema 3** *Determine os pontos de inflexão e o estudo de concavidades para a função*

$$f(x) = 2xe^{-3x}$$

**Problema 4** *Um objeto se move sobre a parábola* $y = 2x^2 + 3x - 1$ *de tal modo que sua abscissa varia à uma taxa de* $6$ *unidades por minuto. Qual é a taxa de variação de sua ordenada quando o objeto estiver no ponto* $(0, -1)$*?*

**Problema 5** *Um retângulo possui seus dois vértices inferiores sobre o eixo* $x$ *e os outros dois vértices sobre a curva*

$$y = 16 - x^2$$

*Dentre todos os possíveis retângulos construídos dessa forma, determine o retângulo de área máxima.*

**Problema 6** *Calcule a integral*

$$\int_1^4 |x - 2| \, dx$$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**2$^o$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2017**
**Data: Quinta-feira, 19 de Abril de 2018** **Turma A1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\textbf{\textit{(L'Hôpital)}}$$

$$=-\infty$$

*Visto que*

$$x\to\frac{\pi}{2}^+\Rightarrow x>\frac{\pi}{2}\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}>0$$

*e*

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-1<0$$

□

**b).** *Considere*

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1+2}{2(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{2(x-2)}$$

$$=\nexists$$

*Uma vez que*

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{2(x-2)}=+\infty$$

*e*

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{2(x-2)}=-\infty$$

■

**Exercício 2** *A circunferência de raio* 2 *e centro em* $(2,0)$ *possui equação dada por*

$$(x-2)^2+y^2=4$$

*Derivando esta equação implicitamente, em relação a x,obtem-se*

$$2(x-2)+2y\tfrac{dy}{dx}=0\quad\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2}{y}$$

*Em* $x=1$, *tem-se o coeficiente angular da reta tangente à curva nos pontos de abscissa* 1, *ou sejas*

$$m_t=\frac{dy}{dx}(1)$$

$$=\frac{1}{y(1)}$$

*Onde y(1) pode ser encontrado substituindo* $x=1$ *na equação da circunferência em questão:*

$$(1-2)^2+(y(1))^2=4\quad\Rightarrow$$

$$1+(y(1))^2=4\quad\Rightarrow$$

$$y(1)=\pm\sqrt{3}$$

*Logo,*

$$y(1)=\sqrt{3}\Rightarrow m_t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y(1)=-\sqrt{3}\Rightarrow m_t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

*E o coeficiente das retas normais que deseja-se encontrar, serão portanto*

$$m_n=-\sqrt{3}$$

*ou*

$$m_n=\sqrt{3}$$

*E as equações procuradas são*

$$y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}(x-1)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}\,(-x+2)$$

*e*

$$y+\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x-2\right)$$

■

**Exercício 3** *Sendo*

$$f(x)=2xe^{-3x}$$

*Segue-se que*

$$f'(x)=2e^{-3x}-6xe^{-3x}$$

$$=e^{-3x}\,(2-6x)$$

*e*

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -3e^{-3x}(2-6x)+e^{-3x}(-6)\\
&= e^{-3x}(-6+18x-6)\\
&= e^{-3x}(18x-12)\\
&= 6e^{-3x}(3x-2)
\end{aligned}
$$

*Como* $6e^{-3x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, *segue-se que*

$$
\begin{aligned}
f''(x)>0 \,\textit{quando}\, 3x-2>0\\
f''(x)<0 \,\textit{quando}\, 3x-2<0
\end{aligned}
$$

*Ou seja,* $f$ *possui concavidade para cima quando* $x>\frac{2}{3}$ *e concavidade para baixo quando* $x<\frac{2}{3}$, *sendo* $x=\frac{2}{3}$ *o único ponto de inflexão desta função.* ■

**Exercício 4** *Sabendo que o objeto move-se sobre a parábola de equação*

$$y=2x^2+3x-1$$

*Segue-se que*

$$\frac{dy}{dt}=(4x+3)\,\frac{dx}{dt}$$

*Logo, como* $\dfrac{dx}{dt}=6\,\text{uni/min}$, *e deseja-se saber a taxa de variação de* $y$ *em relação ao tempo no ponto* $(0,-1)$, *ou seja, quando* $x=0$, *tem-se que*

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt}&=(4\cdot 0+3)\cdot 6\\
&=18\,\text{uni/min}
\end{aligned}
$$

■

**Exercício 5** *Considere* $(x,0)$ *sendo as coordenadas do vértice inferior direito do retângulo (sobre o eixo* $x$*). Por simetria segue-se que o outro vértice inferior possui coordenadas* $(-x,0)$ *e disto segue-se que o retângulo construido dessa forma possui base de comprimento* $b=2x$. *O vértice superior direito, por estar sobre a parábola* $y=16-x^2$ *e acima do vértice* $(x,0)$, *terá coordenadas* $(x,16-x^2)$, *de modo que a altura do retângulo é* $h=16-x^2$. *Assim, a área do retângulo é*

$$
\begin{aligned}
A(x)&=b\cdot h\\
&=2x\left(16-x^2\right)\\
&=-2x^3+32x
\end{aligned}
$$

*Para encontrar-se os pontos candidatos a estremos de* $A$ *é necessário resolver a seguinte equação*

$$
\begin{aligned}
A'(x)=0 &\Leftrightarrow\\
-6x^2+32=0 &\Leftrightarrow\\
x=\pm\sqrt{\frac{16}{3}}
\end{aligned}
$$

*Como* $x$ *deve ser um valor positivo, uma vez que* $2x=b$ *é um dos lados do retângulo, segue-se que o único candidato possível é*

$$x=\sqrt{\frac{16}{3}}$$

*Para classificar este candidato, observe que*

$$
\begin{aligned}
A''(x)=-12x &\Rightarrow\\
A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)=-12\sqrt{\frac{16}{3}}&<0
\end{aligned}
$$

*Sendo possível, portanto, afirmar que* $x=\sqrt{\frac{16}{3}}$ *é um ponto de máximo para a função* $A(x)$. *Logo o retângulo procurado possui vértices* $\left(\sqrt{\frac{16}{3}},0\right),\left(\sqrt{\frac{16}{3}},\frac{32}{3}\right),\left(-\sqrt{\frac{16}{3}},\frac{32}{3}\right),\left(-\sqrt{\frac{16}{3}},0\right)$. ■

**Exercício 6** *Inicialmente observe que*

$$
\begin{aligned}
f(x)&=|x-2|\\
&=\begin{cases} x-2, & se\, x-2\geq 0\\ -(x-2), & se\, x-2<0\end{cases}\\
&=\begin{cases} x-2, & x\geq 2\\ -(x-2), & x<2\end{cases}
\end{aligned}
$$

*Assim*

$$
\begin{aligned}
\int_1^4|x-2|\,dx&=\int_1^2|x-2|\,dx+\int_2^4|x-2|\,dx\\
&=-\int_1^2(x-2)dx+\int_2^4(x-2)dx\\
&=-\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^4\\
&=\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1ª Prova** | **1º Semestre** | **2018**

**Data: Terça-feira, 24 de Julho de 2018** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{3x+9}{x^2+4x+3}$

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

**Problema 2** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

**Problema 3** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$$

**Problema 4** *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$$

**Problema 5** *Encontre um valor diferente de zero para a constante $k$ que torne a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(k\,x)}{x} & se\ x < 0 \\ 3x + 2k^2, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

*contínua em $x = 0$.*

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito 1$^{\text{a}}$ Prova** **2018**
**Data: Sexta-feira, 10 de Agosto de 2018** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Inicialmente observe que*

$$x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-3}\frac{3x+9}{x^2+4x+3}&=\lim_{x\to-3}\frac{3\,(x+3)}{(x+3)(x+1)}\\&=\lim_{x\to-3}\frac{3}{x+1}\\&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\square$

**b).** *Observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{1}{1+\cos x}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Inicialmente observe que*

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

*Tome*

$$u=\sqrt[3]{x}$$

*e observe que*

$$u^3=x$$

$$x\to1\Rightarrow u\to1$$

*Portanto*

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{u\to1}\frac{u^2-2u+1}{(u^3-1)^2}$$

*Por outro lado,*

$$u^2-2u+1=(u-1)^2$$

*e*

$$u^3-1=(u-1)\left(u^2+u+1\right)$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}&=\lim_{u\to1}\frac{u^2-2u+1}{(u^3-1)^2}\\&=\lim_{u\to1}\frac{(u-1)^2}{(u-1)^2\,(u^2+u+1)^2}\\&=\lim_{u\to1}\frac{1}{(u^2+u+1)^2}\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 3** *Observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x}+x^2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-x^4}{1-x}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x\left(1-x^3\right)}{1-x}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\end{aligned}$$

*Além disso,*

$$1-x^3=(1-x)\left(x^2+x+1\right)$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}&=\lim_{x\to1}\frac{x\,(1-x)\left(x^2+x+1\right)}{1-x}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\\&=\lim_{x\to1}x\left(x^2+x+1\right)\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\\&=3\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 4** *Inicialmente observe que*

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x)\\ &= \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x\\ &= 1 - 2\mathrm{sen}^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\, 2x &= \mathrm{sen}(x+x)\\ &= 2\,\mathrm{sen}\, x\, \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x)\\ &= \cos 2x \cos x - \mathrm{sen}\, 2x\, \mathrm{sen}\, x\\ &= \left(1-2\mathrm{sen}^2 x\right)\cos x - (2\,\mathrm{sen}\, x\, \cos x)\,\mathrm{sen}\, x\\ &= \cos x - 4\mathrm{sen}^2 x \cos x\end{aligned}$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\cos 2x - \cos 3x &= 1 - 2\mathrm{sen}^2 x - \cos x + 4\mathrm{sen}^2 x \cos x\\ &= 1 - \cos x - 2\mathrm{sen}^2 x\,(1 - 2\cos x)\end{aligned}$$

*Ou seja*

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - 2\,\mathrm{sen}^2 x\,(1-2\cos x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - 2\,\mathrm{sen}^2 x\,(1-2\cos x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2} - 2(1-2\cos x)\left(\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{2} + 2\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

■

***(Outro Modo:)*** *Observe que*

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}\,\frac{\cos 2x + \cos 3x}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 2x - \cos^2 3x}{x^2(\cos 2x + \cos 3x)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \mathrm{sen}^2 2x - \left(1 - \mathrm{sen}^2 3x\right)}{x^2(\cos 2x + \cos 3x)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}^2 2x + \mathrm{sen}^2 3x}{x^2(\cos 2x + \cos 3x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}^2 2x + \mathrm{sen}^2 3x}{x^2}\,\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\mathrm{sen}^2 2x}{x^2} + \frac{\mathrm{sen}^2 3x}{x^2}\right)\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\mathrm{sen}^2 2x}{x^2}\frac{4}{4} + \frac{\mathrm{sen}^2 3x}{x^2}\frac{9}{9}\right)\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(-4\frac{\mathrm{sen}^2 2x}{4x^2} + 9\frac{\mathrm{sen}^2 3x}{9x^2}\right)\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[-4\left(\frac{\mathrm{sen}\, 2x}{2x}\right)^2 + 9\left(\frac{\mathrm{sen}\, 3x}{3x}\right)^2\right]\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= (-4+9)\frac{1}{2}\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{tg}(kx)}{x}, & se\, x < 0\\ 3x + 2k^2, & se\, x \geq 0\end{cases}$$

*Para que $f$ seja contínua em $x = 0$, é necessário que*

*i). $f(0)$ exista. Observe no entanto, que*

$$f(0) = 3\cdot 0 + 2k^2$$

*Ou seja, se existir $k$, $f(0)$ também existe.*

*ii). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exista. Observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^{+-}} f(x) &= \lim_{x\to 0^{+-}}\left(3x + 2k^2\right)\\ &= 2k^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{tg}(kx)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\mathrm{sen}\, kx}{\cos kx}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{sen}\, kx}{x\cos kx}\frac{k}{k},\ k\neq 0\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{sen}\, kx}{kx}\frac{k}{\cos kx}\\ &= k\end{aligned}$$

*Assim, é necessário que*

$$\lim_{x\to 3^{+-}} f(x) = \lim_{x\to -3^{-}} f(x) \Leftrightarrow$$

$$2k^2 = k \Leftrightarrow$$

$$(2k-1)\,k = 0 \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{1}{2}$$

*Portanto, é necessário que* $k = \frac{1}{2}$ *para que este item necessário para a continuidade de* $f$ *em* $0$ *esteja satisfeito.*

iii). *Por fim, é necessário que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

*Dos itens (i), (ii), sabe-se que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2k^2 = \frac{1}{2}$$

*e*

$$f(0) = 2k^2 = \frac{1}{2}$$

*Assim, tem-se o que desejava-se.*

*Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função* $f$ *em* $x = 0$ *para* $k = \dfrac{1}{2}$. $\blacksquare$.

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof$^o$. Edson**

**2ª Prova** | **1º Semestre** | **2018**

**Data: Terça-feira, 04 de Setembro de 2018** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

**b).** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

**Problema 2** *Encontre a equação da reta tangente à curva*

$$y=\frac{2x+1}{3x-4}$$

*no ponto de abcissa* $x=-1$.

**Problema 3** *Calcule a derivada das funções*

**a).** $f(x)=\dfrac{3\sec^2 x}{x}$

**b).** $f(x)=\ln\left(\cos^2 x\right)$

**Problema 4** *Suponha que* $F(x)=f(g(x))$ *e* $g(3)=6$, $g'(3)=4$, $f'(3)=2$ *e* $f'(6)=7$. *Calcule* $F'(3)$.

**Problema 5** *Calcule* $f'(x)$ *sabendo que*

$$f(x)=\begin{cases}1-x & se\ x\leq 0\\ e^{-x}, & se\ x>0\end{cases}$$

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2018**

**Data: Quarta-feira, 5 de Setembro** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6\left(9-\frac{1}{x^5}\right)}}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\sqrt{9-\frac{1}{x^5}}}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9-\frac{1}{x^5}}}{1+\frac{1}{x^3}}$$
$$=3$$

□

**b).** *Observe que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{n+1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{n+1}$$

*Considere uma nova variável u tal que*

$$\frac{1}{u}=\frac{2}{2n+1}$$

*ou seja*

$$u=\frac{2n+1}{2}$$

*Disto segue-se que*

$$n=u-\frac{1}{2}$$

*e*

$$n\to+\infty\Rightarrow u\to+\infty$$

*Ou seja*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{n+1}$$
$$=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u-\frac{1}{2}+1}$$
$$=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+\frac{1}{2}}$$
$$=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=e$$

■

**Exercício 2** *Uma das maneiras de determinar a equação de uma reta é encontrar um ponto $P$ por onde esta reta passa e seu coeficiente angular $m$. Por tratar-se de uma reta tangente ao gráfico de*

$$y=\frac{2x+1}{3x-4}$$

*no ponto de abcissa $x=-1$, segue-se que*

$$P=(-1,y(-1))$$

*e*

$$m=y'(-1)$$

*Onde*

$$y(-1)=\frac{2(-1)+1}{3(-1)-4}$$
$$=\frac{1}{7}$$

*Para o cálculo de $y'(-1)$, é necessário inicialmente calcular $y'(x)$. Usando a regra do quociente, tem-se*

$$y'(x)=\frac{(2x+1)'(3x-4)-(2x+1)(3x-4)'}{(3x-4)^2}$$
$$=\frac{2(3x-4)-(2x+1)3}{(3x-4)^2}$$
$$=\frac{6x-8-6x-3}{(3x-4)^2}$$
$$=\frac{-11}{(3x-4)^2}$$

*Ou seja*

$$\begin{aligned} m &= y'(-1) \\ &= -\frac{11}{49} \end{aligned}$$

*E a reta procurada possui equação dada por*

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{7} &= -\frac{11}{49}(x+1) \Leftrightarrow \\ y &= \frac{1}{7} - \frac{11}{49}x - \frac{11}{49} \Leftrightarrow \\ y &= -\frac{11}{49}x - \frac{4}{49} \end{aligned}$$

*ou, na forma geral*

$$49y + 11x = -4$$

■

**Exercício 3**

**a).** *Usando as* ***regras do quociente*** *e* ***da cadeia****, tem-se que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3\sec^2 x)'(x) - 3\sec^2 x(x)'}{x^2} \\ &= \frac{6x \sec x \sec x \operatorname{tg} x - 3\sec^2 x}{x^2} \\ &= \frac{3\sec^2 x\,(2x\operatorname{tg} x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

□

**b).** *Usando a* ***regra da cadeia*** *na* ***forma de Leibnitz****, considere*

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ v &= u^2 \end{aligned}$$

*Assim,*

$$f(x) = \ln v$$

*e*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\operatorname{sen} x \\ \frac{dv}{du} &= 2u \\ \frac{df}{dv} &= \frac{1}{v} \end{aligned}$$

*Além disto, tem-se que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dx} \\ &= \frac{df}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{v}2u\,(-\operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{u^2}2u\,(-\operatorname{sen} x) \\ &= -2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= -2\operatorname{tg} x \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *Sabendo que*

$$F(x) = f(g(x))$$

*Tem-se, pela regra da cadeia, que*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

*Assim, segue-se que*

$$\begin{aligned} F'(3) &= f'(g(3))g'(3) \\ &= f'(6)\cdot 4 \\ &= 7\cdot 4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Uma vez que a função $f$ é dada por sentença, o cálculo de sua derivada dever feito em três partes:*

**1º Caso:** *Para $x < 0$ tem-se*

$$f(x) = 1 - x$$
$$\Rightarrow$$
$$f'(x) = 1$$

**2º Caso:** *Para $x > 0$ tem-se*

$$f(x) = e^{-x}$$
$$\Rightarrow$$
$$f'(x) = -e^{-x}$$

**3$^o$Caso:** *Quando $x = 0$, tem-se*

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

*Como $f$ possui sentenças diferentes à direita e à esquerda do zero, é necessário o uso de limites laterais para este cálculo, ou seja*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1 - h - 1}{h}$$
$$= -1$$

*Por outro lado,*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h}$$

*Considere*

$$w = e^{-h} - 1$$

*e observe que*

$$w + 1 = e^{-h} \quad \Rightarrow$$
$$\ln(w+1) = -h \quad \Rightarrow$$
$$h = -\ln(w+1)$$

*e*

$$h \to 0^+ \Rightarrow w \to 0^-$$

*Logo*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h}$$
$$= \lim_{w\to 0^-} \frac{w}{-\ln(w+1)}$$
$$= \lim_{w\to 0^-} \frac{1}{-\frac{1}{w}\ln(w+1)}$$
$$= \lim_{w\to 0^-} \frac{1}{-\ln(1+w)^{\frac{1}{w}}}$$
$$= \frac{1}{-\ln e}$$
$$= -1$$

*Portanto*

$$f'(0) = -1$$

*e*

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x = 0 \\ -e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1, & \text{se } x \leq 0 \\ -e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**3ª Prova** | **1º Semestre** | **2018**

**Data: Quinta-feira, 27 de Setembro de 2018** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites:*

**a).** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - \cos x}$

**b).** $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

**Problema 2** *Encontre e classifique os extremos da função*

$$f(x) = x^6 - 2x^4$$

**Problema 3** *Determine as retas normais à circunferência de centro em* $(2, 0)$ *e raio* $2$ *nos pontos de abcissa* $1$.

**Problema 4** *Um objeto se move sobre a parábola* $y = 2x^2 + 3x - 1$ *de tal modo que sua abcissa varia à uma taxa de 6 unidades por minuto. Qual é a taxa de variação de sua ordenada quando o objeto estiver no ponto* $(0, -1)$*?*

**Problema 5** *Determine o ponto sobre a curva* $y = x^2 + x$ *que se encontra mais próximo de* $(7, 0)$.

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1$^o$ Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2018**
**Data: Terça-feira, 2 de Outubro** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que o numerador e denominador da função dentro do limite se aproximam de zero quando $x \to 0$. Assim, usando a **regra de L'Hospital**, tem-se*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x+\operatorname{sen} x}=1$$

$\square$

**b).** *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

*e o numerador e denominador desta função dentro do limite tendem a zero quando $x \to +\infty$. Portanto, usando a **regra de L'Hospital**, tem-se*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}-\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)x^2\\&=\lim_{x\to+\infty}\pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\\&=\pi\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Exercício 2** *Observe que*

$$\begin{aligned}f'(x)&=6x^5-8x^3\\&=2x^3\left(3x^2-4\right)\\f''(x)&=30x^4-24x^2\\&=6x^2\left(5x^2-4\right)\end{aligned}$$

*Os candidatos a extremos de $f$ são soluções da equação*

$$\begin{aligned}f'(x)=0&\Leftrightarrow\\2x^3\left(3x^2-4\right)=0&\Leftrightarrow\\x=0\,ou\,x&=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

*Para classificar os candidatos encontrados, é necessário analisar o sinal de $f''$ em cada um deles, ou seja*

$$\begin{aligned}f''(0)&=0\\f''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)&=6\frac{4}{3}\left(5\frac{4}{3}-4\right)\\&=\frac{64}{3}>0\\f''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)&=6\frac{4}{3}\left(5\frac{4}{3}-4\right)\\&=\frac{64}{3}>0\end{aligned}$$

*Segue-se disto que $x=0$ é um **ponto de inflexão**, e $x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ são ambos **pontos de mínimos globais**.* $\blacksquare$

**Exercício 3** *A circunferência de centro em $(2,0)$ e raio 2 possui equação dada por*

$$(x-2)^2+y^2=4$$

*Considerando $y$ como variável dependente de $x$ e derivando a equação anterior em relação a $x$, tem-se*

$$\begin{aligned}2(x-2)+2y\frac{dy}{dx}=0&\Leftrightarrow\\\frac{dy}{dx}&=\frac{2-x}{y}\end{aligned}$$

*Sobre a circunferência os pontos de abcissa $x=1$ possuem ordenadas obtidas da equação*

$$(1-2)^2+y^2=4\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

*Assim, nestes pontos os coeficientes angulares das suas respectivas tangentes são*

$$m_1=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=-\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

*Logo as retas normais à circunferência nos pontos* $(1, \sqrt{3})$ *e* $(1, -\sqrt{3})$ *possuem, respectivamente, os seguintes coeficientes angulares*

$$m_{1\perp} = \frac{-1}{m_1} = -\sqrt{3}$$

$$m_{2\perp} = \frac{-1}{m2} = \sqrt{3}$$

*e suas equação são*

$$y - \sqrt{3} = -\sqrt{3}(x-1)$$

*e*

$$y + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x-1)$$

■

**Exercício 4** *De acordo com o enunciado do problema as variáveis* $x$ *e* $y$ *mudam com tempo. Além disso, é dado que*

$$y = 2x^2 + 3x - 1$$

*Então, derivando em ambos os lados desta equação em relação o tempo, tem-se*

$$\frac{dy}{dt} = (4x+3)\,\frac{dx}{dt}$$

*Como*

$$\frac{dx}{dt} = 6\,u/\min$$

*quando o objeto está no ponto* $(0, -1)$, *ou seja quando* $x = 0$ *e* $y = -1$, *segue-se*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (4 \cdot 0 + 3)\,6 \\ &= 18\,u/\min\end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Um ponto sobre a curva*

$$y = x^2 + x$$

*possui coordenadas*

$$(x, x^2 + x)$$

*A distância deste ponto ao ponto* $(7, 0)$ *é dada por*

$$\begin{aligned}f(x) = d^2 &= (x-7)^2 + (x^2+x)^2 \\ &= x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

*Assim, tem-se*

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x - 14$$

*Os candidatos a extemos de* $f$ *são obtidos como solução da equação*

$$\begin{gathered}f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ 4x^3 + 6x^2 + 4x - 14 = 0\end{gathered}$$

*Ou seja*

$$x = 1$$

*é o único candidato real. Observe que*

$$f''(x) = 12x^2 + 12x + 4$$

*e*

$$f''(1) = 28 > 0$$

*Ou seja,* $x = 1$ *de fato é um* ***ponto de mínimo global*** *da função* $f$. ■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma 1X**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**Prova Final** | **1$^{\text{o}}$ Semestre** | **2018**

**Data: Terça-feira, 02 de Outubro de 2018** | **Duração: 10:00 - 12:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

**a).** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

**b).** $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x-2}\right)$

**Problema 2** *Dado que* $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ *e* $g(x)=\sqrt{3x-1}$, *encontre* $F'(x)$ *sabendo que* $F(x)=f(g(x))$.

**Problema 3** *Uma partícula está se movendo ao longo da hipérbole* $xy=8$. *Quando atinge o ponto* $(4,2)$ *a coordenada* $y$ *está decrescendo a uma taxa de* $3\,cm/s$. *Quão rápido a coordenada* $x$ *deste ponto está variando neste momento?*

**Problema 4** *Ache o ponto do gráfico de* $y=x^2+1$ *mais próximo do ponto* $(3,1)$.

**Problema 5** *Em que ponto(s) a reta tangente à curva* $y^3=2x^2$ *é perpendicular à reta* $x+2y-2=0$?

*Boa sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{\text{o}}$. Edson**

**1$^{\text{o}}$ Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2018**
**Data: Terça-feira, 02 de Outubro de 2018** **Turma 1X**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-\operatorname{sen}x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\textbf{\textit{(L'Hôpital)}}$$

$$=-\infty$$

*Visto que*

$$x\to\frac{\pi}{2}^+\Rightarrow x>\frac{\pi}{2}\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}>0$$

*e*

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-1<0$$

□

**b).** *Considere*

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1+2}{2(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{2(x-2)}$$

$$=\nexists$$

*Uma vez que*

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{2(x-2)}=+\infty$$

*e*

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{2(x-2)}=-\infty$$

■

**Exercício 2** *Sabendo-se que*

$$F(x)=f(g(x))$$

*segue-se da* ***regra da cadeia*** *que*

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

*Como*

$$f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

*e*

$$g(x)=\sqrt{3x-1}$$

*Tem-se que*

$$f'(g(x))=\frac{g(x)}{(g(x))^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3x-1}}{3x-1+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3x-1}}{3x}$$

*e*

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

*Portanto*

$$F'(x)=\frac{\sqrt{3x-1}}{3x}\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

$$=\frac{1}{2x}$$

■

**Exercício 3** *Sabe-se que a partícula move-se sobre a curva $xy=8$. Assim, temos que as coordenadas $x$ e $y$ desta partícula mudam com o tempo. Assim, derivando implicitamente, teremos*

$$\frac{d}{dt}(xy)=\frac{d}{dt}(8)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}y+x\frac{dy}{dt}=0$$

*Também é informado no problema que a coordenada $y$ da partícula está decrescendo a uma taxa de $3\,cm/s$ quando atinge o ponto $(4,2)$, ou seja*

$$\frac{dy}{dt}=-3\,cm/s$$

*Com isto segue-se que, neste instante teremos*

$$\frac{dx}{dt}2+4(-3)=0\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}=6\,cm/s$$

■

**Exercício 4** *Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^2 + 1$, ou seja*

$$b = a^2 + 1$$

*A distância entre o ponto $P$ e o ponto $(3, 1)$ é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2}$$

$$= \sqrt{(a-3)^2 + a^4}$$

$$= \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9}$$

*Considere a função*

$$\mathbf{g}(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9$$

*e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$, estamos também minimizando a função $\mathbf{d}$. Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 4a^3 + 2a - 6$$

*e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação*

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$4a^3 + 2a - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^3 + a - 3 = 0$$

*Donde segue-se que $a = 1$ é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função $\mathbf{g}$, observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 6a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

*Com isto,temos que $b = 2$ e o ponto procurado é $(1, 2)$.* ■

**Exercício 5** *Observe que a reta em questão possui coeficiente angular*

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

*Logo, a reta que estamos procurando possui coeficiente angular $m_1$, sendo*

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

*ou seja,*

$$m_1 = 2$$

*Considere $(a, b)$ sendo o ponto sobre a curva $y^3 = 2x^2$, tal que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = m_1 = 2 \tag{1}$$

*usando derivação implícita sobre a equação da curva dada, teremos*

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 4x$$

*donde segue-se que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3b^2}$$

*Como o ponto $(a, b)$ está sobre a curva, segue-se que*

$$b^3 = 2a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2a^2}$$

*Assim, temos*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}$$

*Voltando à equação (1) teremos*

$$\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$4a = 6\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$2a = 3\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$8a^3 = 27 \cdot 4a^4 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2}{27}$$

*e, em conseqüência disto,*

$$b = \frac{2}{9}$$

*Ou seja, o ponto procurado é*

$$(a, b) = \left(\frac{2}{27}, \frac{2}{9}\right)$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1ª Prova** | **1º Semestre** | **2024**

**Data: 23 de Setembro de 2024** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limite*

*a).* $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-4}\right)$

*b).* $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$

**Problema 2** *Resolva o limite*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}$$

**Problema 3** *Resolva o limite*

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{x-1}$$

**Problema 4** *Resolva o limite*

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{8x^2+7\sqrt[3]{x}}{\sqrt{16x^4+6}}$$

**Problema 5** *Sabendo que*

$$H(x)=\begin{cases}0, \ \textit{se}\ x<0\\ 1, \ \textit{se}\ x\geq 0\end{cases}$$

*Identifique, caso existam, os pontos de descontinuidade da função*

$$f(x)=H(x-2)\sqrt{x}$$

*Justifique sua resposta!*

*Boa Sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2024**
**Data: Quinta-feira, 12 de Setembro de 2024** **Turma X1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right) &= \lim_{x\to 4}\frac{x-4-4\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

□

**b).** *Perceba também, que*

$$x^3-1=(x-1)\left(x+x^2+1\right)$$

*Logo*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x-1)^3} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x+x^2+1\right)}{(x-1)^3}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+1}{(x-1)^2}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

*uma vez que*

$$x+x^2+1\to 3$$

$$(x-1)^2\to 0^+$$

*quando* $x\to 1$. ■

**Exercício 2** *Inicialmente obeserve que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{tg}x-1} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-1}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\left(\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\cos x}\right)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{sen}x-\cos x\right)\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x\\
&= \cos\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

■

**Exercício 3** *Inicialmente perceba que*

$$x-1\to 0$$

*e*

$$-1\le \operatorname{sen}\frac{\pi}{x-1}\le 1$$

*Logo,*

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{x-1}=0$$

■

**Exercício 4** *Resolvendo o limite, tem-se que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2+7\sqrt[3]{x}}{\sqrt{16x^4+6}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2+7x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{16x^4+6}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(8+7\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4\left(16+\frac{6}{x^4}\right)}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(8+7\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{16+\frac{6}{x^4}}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{8+\frac{7}{x^{\frac{5}{3}}}}{\sqrt{16+\frac{6}{x^4}}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{16}}$$

$$= 2$$

■

**Exercício 5** *De acordo com o enunciado,*

$$H(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

*Assim,*

$$H(x-2) = \begin{cases} 0, \text{ se } x-2 < 0 \\ 1, \text{ se } x-2 \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ se } x < 2 \\ 1, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

*Portanto*

$$f(x) = H(x)\sqrt{x}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ se } x < 2 \\ \sqrt{x}, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

*Analisando a continuidade da função, tem-se que*

- *Quando $x < 2$, $f(x) = 0$. Portanto $f$ é contínua nesse intervalo.*
- *Quando $x > 2$, $f(x) = \sqrt{x}$ que é uma função contínua nesse intervalo.*
- *Quando $x = 2$, tem-se*
  - *$f(2) = \sqrt{2}$, ou seja $f(2)$ existe*
  - *Calculando os limites laterais*

    $$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} 0$$
    $$= 0$$
    $$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^-} \sqrt{x}$$
    $$= \sqrt{2}$$

    *Como tais limites são diferentes, segue-se que*

    $$\lim_{x\to2} f(x) = \nexists$$

  *Ou seja, $f$ não é contínua em $x = 2$ que é seu único ponto de descontinuidade.*

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Profº. Edson**

**2ª Prova** **1º Semestre** **2024**

**Data: 30 de Outubro de 2024** **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule $f'(x)$, sendo*

*a).* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

*b).* $f(x) = x^4 - \ln\left(x^4+1\right)$

**Problema 2** *Seja*

$$f(x) = ax^2 + bx$$

*Encontre os valores de $a$ e $b$, sabendo que a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2,7)$ possui coeficiente angular $m = 12$.*

**Problema 3** *Calcule*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\sec x$

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

**Problema 4** *Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ em $x = 4$, sabendo que $y(x)$ é dada implicitamente através da equação*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$$

**Problema 5** *Um tanque, no formato de um cone circular reto invertido (com o vértice para baixo), com 12m de altura e raio 6m, está sendo esvaziado através de um furo em seu vértice a uma taxa de $2m^3/s$. Qual é a taxa de variação do nível da água no instante em que o nível é de 3m?*

*Boa Sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^{o}$. Edson**

**1$^{o}$ Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2024**
**Data: Sexta-feira, 1 de Novembro de 2024** **Turma X1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Sendo*
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
*Segue-se, da* ***regra do quociente*** *que*

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}$$

*e, pela* ***regra da cadeia****, tem-se que*

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

*Portanto*

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

□

**b).** *Sabendo que*

$$f(x) = x^4 - \ln\left(x^4+1\right)$$

*tem-se que*

$$f'(x) = 4x^3 - \left[\ln\left(x^4+1\right)\right]'$$

*e, pela regra da cadeia,*

$$\left[\ln\left(x^4+1\right)\right]' = \frac{4x^3}{x^4+1}$$

*Logo*

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{4x^3}{x^4+1}$$

$$= \frac{4x^7 + 4x^3 - 4x^3}{x^4+1}$$

$$= \frac{4x^7}{x^4+1}$$

■

**Exercício 2** *Inicialmente obeserve que*

$$f'(x) = 2ax + b$$

*Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2,7)$ é*

$$f'(2) = 4a + b$$

*Por outro lado, é dito no enunciado que tal coeficiente é $m = 12$, ou seja*

$$f'(2) = m \Leftrightarrow 4a + b = 12$$

*Como o gráfica da função passa pelo ponto $(2,7)$, segue-se que*
$$f(2) = 7 \Rightarrow 4a + 2b = 7$$
*Tem-se portanto sistema*

$$\begin{cases} 4a + b = 12 \\ 4a + 2b = 7 \end{cases}$$

*Donde segue-se que*

$$\begin{cases} a = \dfrac{17}{4} \\ b = -5 \end{cases}$$

■

**Exercício 3**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sec x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-1}{-\operatorname{sen} x}\text{(por \textbf{L'Hospital})}$$

$$= 1$$

□

**b).** *Observe que*

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}}$$

*(por **L'Hospital**)*

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{\ln x + 2}$$

*(por **L'Hospital**)*

$$= -\frac{1}{2}$$

■

**Exercício 4** *Sabe-se que*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$$

*Logo, quando $x=4$, tem-se*

$$2+\sqrt{y}=3 \Rightarrow y=1$$

*Além disse, admitindo $y(x)$ e derivando implicitamente a equação dada, em relação a $x$, tem–se*

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

*Ou seja,*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

*e*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4}=-\frac{1}{2}$$

■

**Exercício 5** *Sabe-se que o cone de altura h e raio r possui volume*

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

*e, por semelhança de triângulo, o cone formado pela água contida no cone de altura $12m$ e raio $6m$, quando a água estiver no nível de altura h, terá raio*

$$r=\frac{h}{2}$$

*Ou seja, seu volume é dado por*

$$V=\frac{1}{12}\pi h^3$$

*Assim,*

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{12}\pi\cdot 3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$=\frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

*Sabendo que*

$$\frac{dV}{dt}=-2m^3/2,$$

*no instante em que $h=3$, tem-se*

$$-2=\frac{1}{4}\pi\cdot 9\frac{dh}{dt}$$

*Ou seja*

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{8}{9\pi}\,m/s$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Profº. Edson**

**3ª Prova** | **1º Semestre** | **2024**

**Data: 04 de Dezembro de 2024** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Determine onde a função*

$$f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$$

*é* ***decrescente****. Usando esta informação, decida qual é o maior valor:* $800^2 + 200^2$ *ou* $600^2 + 400^2$.

**Problema 2** *Encontre e clasifique os extremos da função*

$$f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 3x}$$

**Problema 3** *Deseja-se construir um cercado no formato retangular aproveitando-se um muro já existente e que possua* $8km^2$ *de área. Determine as dimensões do retângulo que minimizem a quantidade de cerca necessária para construir os três lados restantes.*

**Problema 4** *Calcule as integrais*

*a).* $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

*b).* $\displaystyle\int \left(x^3 + 1\right) \cos\left(x^4 + 4x\right)\, dx$

**Problema 5** *Calcule a área da região entre os gráficos da função* $f(x) = x^3 - 10x$ *e* $g(x) = 6x$.

*Boa Sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof$^o$. Edson**

**1º Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2024**
**Data: Quinta-feira, 05 de Dezembro de 2024** **Turma X1**

---

**Exercício 1** *Sendo*

$$f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$$

*Segue-se, que*

$$f'(x) = -2\,(1000 - x) + 2x$$
$$= 4x - 2000$$

*Realizando o estudo de sinal de $f'$, tem-se que*

- $f'(x) > 0$ *para* $x > 500$
- $f\prime(x) < 0$ *para* $x < 500$

*Ou seja, $f$ é decrescente para $x \in (-\infty, 500)$.*
*Observe ainda que*

$$f(200) = 800^2 - 200^2$$
$$f(400) = 600^2 - 400^2$$

*Logo, como $f$ é **decrescente** no intervalo $(-\infty, 500)$, segue-se que $f(200) > f(400)$, ou, dito de outro modo*

$$800^2 - 200^2 > 600^2 - 400^2$$

■

**Exercício 2** *Inicialmente observe que*

$$f'(x) = \frac{-(x^2+3x) - (1-x)(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2+3x)^2}$$

*Logo, os candidatos a extremos de $f$ são obtidos como soluções da equação*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

*Ou seja $x = 3$ e $x = -1$. Para a classificação destes pontos, perceba agora que*

$$f''(x) = \frac{2x\left(-x^4 + 18x^2 + 36x + 27\right)}{(x^2+3x)^4}$$

*e*

$$f''(3) = \frac{1}{81} > 0$$
$$f''(-1) = -1 < 0$$

*Assim, $x = 3$ é um ponto de **mínimo** global e $x = -1$ é um ponto de **máximo** global.* ■

**Exercício 3** *Considere $x$ e $y$ sendo as dimensões do retângulo que deseja-se encontrar. Como serão necessários apenas 3 lados desse retângulo, o gasto com a cerca corresponde à soma dos comprimentos destes lados, ou seja*

$$C = 2x + y$$

*Além disso, a área deve ser de $8km^2$,*

$$xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

*Portanto,*

$$C(x) = 2x + \frac{8}{x}$$

*e*

$$C'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

*O candidatos a extremos da função $C$ são obtidos como solução da equação*

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{8}{x^2} = 0$$

*Donde segue-se que $x = 2$. Observe que*

$$C''(x) = \frac{16}{x^3}$$

*e*

$$C''(2) = 2 > 0$$

*Logo $x = 2$ é de fato um ponto de **mínimo** da função, e as dimensões do retângulo procurado são $x = 2$ e $y = 4$.* ■

**Exercício 4**

*a). Considere*

$$w = \sqrt{t}$$

*e observe que*

$$dw = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$
$$= \frac{1}{2w}dt \Rightarrow$$

$$2wdw = dt$$

*Portanto*

$$\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt = \int \frac{\cos w}{w}2w\,dw$$

$$= 2\int \cos w\,dw$$

$$= 2\text{sen}\,w + k$$

$$= 2\text{sen}\,\sqrt{t} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

□

*b). Considere*

$$v = x^4 + 4x$$

*e observe que*

$$dv = \left(4x^3 + 4\right)dx$$
$$= 4\left(x^3 + 1\right)dx \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{4} = \left(x^3 + 1\right)dx$$

*Portanto*

$$I = \int \left(x^3 + 1\right)\cos\left(x^4 + 4x\right)dt$$

$$= \int \cos v\,\frac{dv}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos v\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\text{sen}\,v + k$$

$$= \frac{1}{4}\text{sen}\,\left(x^4 + 4x\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

■

**Exercício 5** *Calculando a interseção entre os gráficos de*

$$f(x) = x^3 - 10x$$

*e*

$$g(x) = 6x$$

*Obtêm-se*

$$x^3 - 10x = 6x \Rightarrow$$

$$x^3 - 16x = 0 \Rightarrow$$

$$x\left(x^2 - 16\right) = 0$$

*Ou seja, $x = -4$, $x = 0$ e $x = 4$. Logo a área que deseja-se calcular é dada por*

$$A = \left|\int_{-4}^{0}[f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{0}^{4}[f(x) - g(x)]\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{-4}^{0}\left(x^3 - 16x\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{4}\left(x^3 - 16x\right)dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} - 8x^2\right)\Big|_{-4}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} - 8x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right|$$

$$= 128$$

■

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I - Turma X1**

**Prof. Edson**

**Prova Final** | **1º Semestre** | **2024**

**Data: 09 de Dezembro de 2024** | **Duração: 14:00 - 16:00**

---

**Problema 1** *Calcule os limites*

*a).* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1 - x}$

*b).* $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^6 - 1}}$

**Problema 2** *Sabendo que*

$$H(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

*Identifique, caso existam, os pontos de descontinuidade da função*

$$f(x) = H(x-2)\sqrt{x}$$

*Justifique sua resposta!*

**Problema 3** *Sejam* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma outra função, dada por*

$$f(x) = e^x\, g(3x+1)$$

*Calcule* $f'(0)$, *sabendo que* $g(1) = 2$ *e* $g'(1) = 3$.

**Problema 4** *Calcule as integrais*

*a).* $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x} dx$

*b).* $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\,(x+1)^{100}\, dx$

**Problema 5** *Determine o ponto do gráfico de* $y = x^3$ *que está mais próximo do ponto* $(4, 0)$.

*Boa Sorte!*

**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof. Edson**

**1º Semestre**

**Gabarito Prova Final** **2024**
**Data: Segunda-feira, 09 de Dezembro de 2024** **Turma X1**

---

**Exercício 1**

**a).**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x} &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1-x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

**b).**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^6-1}} &= \lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{x^6(5-\frac{1}{x^6})}}\\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{6x^2}{x^2\sqrt[3]{5-\frac{1}{x^6}}}\\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{5-\frac{1}{x^6}}}\\
&= \frac{6}{\sqrt[3]{5}}
\end{aligned}
$$

■

**Exercício 2** *De acordo com o enunciado,*

$$
H(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0\\ 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}
$$

*Assim,*

$$
\begin{aligned}
H(x-2) &= \begin{cases} 0, \text{ se } x-2 < 0\\ 1, \text{ se } x-2 \geq 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0, \text{ se } x < 2\\ 1, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

*Portanto*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(x)\sqrt{x}\\
&= \begin{cases} 0, \text{ se } x < 2\\ \sqrt{x}, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

*Analisando a continuidade da função, tem-se que*

- *Quando $x < 2$, $f(x) = 0$. Portanto $f$ é contínua nesse intervalo.*
- *Quando $x > 2$, $f(x) = \sqrt{x}$ que é uma função contínua nesse intervalo.*
- *Quando $x = 2$, tem-se*
  - *$f(2) = \sqrt{2}$, ou seja $f(2)$ existe*
  - *Calculando os limites laterais*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} 0\\
&= 0\\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \sqrt{x}\\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

*Como tais limites são diferentes, segue-se que*

$$
\lim_{x\to 2} f(x) = \nexists
$$

*Ou seja, $f$ não é contínua em $x = 2$ que é seu único ponto de descontinuidade.*

■

**Exercício 3** *Precisamos inicialmente calcular a derivada da função*

$$
f(x) = e^x g(3x+1)
$$

*Para isto, considere*

$$
h(x) = 3x+1
$$

*e*

$$p(x) = g(3x+1)$$

*Observe então que*

$$p(x) = g(h(x))$$

*Portanto, usando a* ***regra da cadeia****, teremos*

$$\begin{aligned} p'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= 3g'(3x+1) \end{aligned}$$

*Observe agora que*

$$f(x) = e^x p(x)$$

*e usando a regra de derivação do produto teremos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x p(x) + e^x p'(x) \\ &= e^x \left[p(x) + p'(x)\right] \\ &= e^x \left[g(3x+1) + 3g'(3x+1)\right] \end{aligned}$$

*Donde segue-se que*

$$f'(0) = e^0 \left[g(1) + 3g'(1)\right]$$

*Como sabemos que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$, segue-se que*

$$f'(0) = 2 + 3 \cdot 3 = 11$$

■

**Exercício 4**

*a).*

$$\begin{aligned} \int \left(\tfrac{x^2+1}{x}\right) dx &= \int \left(x + \tfrac{1}{x}\right) dx \\ &= \tfrac{x^2}{2} + \ln|x| + k \end{aligned}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$* □

*b). Tome*

$$y = x + 1$$

*e observe que*

$$dy = dx$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

*Portanto*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} x(x+1)^{100} dx &= \int_0^1 (y-1)y^{100} dy \\ &= \int_0^1 \left(y^{101} - y^{100}\right) dy \\ &= \left.\frac{y^{102}}{102} - \frac{y^{101}}{101}\right|_0^1 \\ &= \frac{1}{102} - \frac{1}{101} \\ &= \frac{-1}{10302} \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^3$, ou seja*

$$b = a^3$$

*A distância entre o ponto $P$ e o ponto $(4, 0)$ é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a-4)^2 + a^6}$$

$$= \sqrt{a^6 + a^2 - 8a + 16}$$

*Considere a função*

$$\mathbf{g}(a) = a^6 + a^2 - 8a + 16$$

*e observe que, minimizando a função **g**, estamos também minimizando a função **d**. Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 6a^5 + 2a - 8$$

*e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação*

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$6a^5 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^5 + a - 4 = 0$$

*Donde segue-se que $a = 1$ é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função **g**, observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 30a^4 + 2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

*Com isto,temos que $b = 1$ e o ponto procurado é $(1, 1)$.* ■