ÁLGEBRA LINEAR

Caderno de Exercícios

Professor: Carlos Antônio Freitas da Silva

SISTEMAS LINEARES

Exercício

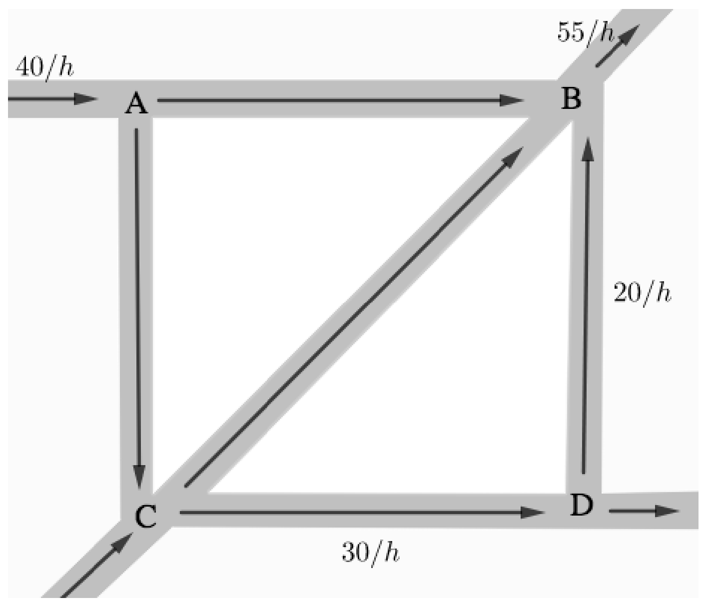
Analise cada um dos problemas a seguir e formule um modelo matemático que o represente por meio de um sistema de equações. Descreva seu raciocínio de modo que fique claro as varáveis de cada problema.

Problema 1

Considere quatro cruzamentos A, B, C e D, como mostra a imagem. As setas indicam o sentido do tráfego.

Do cruzamento A entram 40 carros por hora, do cruzamento B saem 55 carros por hora, do cruzamento C para D passam 30 carros por hora, e de D para B passam 20 carros por hora.

Descubra a quantidade de carros que circulam no restante das ruas, considerando que nenhum carro fica parado.



Problema 2

Necessita-se adubar um terreno acrescentando $140\,g$ de nitrato, $190\,g$ de fosfato e $205\,g$ de potássio a cada $10\,m^2$. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

- Cada quilograma do adubo I custa R$ 5,00 e contém $10\,g$ de nitrato, $10\,g$ de fosfato e $100\,g$ de potássio;

- Cada quilograma do adubo II custa R$ 6,00 e contém $10\ g$ de nitrato, $100\ g$ de fosfato e $30\ g$ de potássio;
- Cada quilograma do adubo III custa R$ 5,00 e contém $50\ g$ de nitrato, $20\ g$ de fosfato e $20\ g$ de potássio;
- Cada quilograma do adubo IV custa R$ 15,00 e contém $20\ g$ de nitrato, $40\ g$ de fosfato e $35\ g$ de potássio;

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar R$ 54,00 a cada $10\ m^2$ com adubação?

Problema 3

Um agricultor deseja plantar tomate, cebola e cenoura. O gasto com plantio é R$ 3,00/m² para o tomate, R$ 4,00/m² para cebola e R$ 2,00/m² para cenoura. Seu lucro líquido é em média de R$ 1,00/m² com o tomate, R$ 0,80 com cebola e R$ 0,90 com a cenoura. Este agricultor dispõe de R$ 35.000,00 para investir no plantio e deseja um lucro líquido de R$ 9.700,00. Sua área disponível para plantio é de 11.000 m². Como ele pode distribuir sua plantação para que obtenha um resultado esperado?

Problema 4

Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos, determinou-se quantidade de vitamina para cada alimento:

- O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2unidades de vitamina E.
- O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

- O alimento III tem2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.
- O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.
- O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

Problema 5

Faça o balanceamento da reação de dissolução do vidro em HF

$$HF + SiO_2 \rightarrow SiF_4 + H_2O$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Operações elementares

As operações que podemos realizar sobre as linhas de uma matriz A para realizar o processo de eliminação de Gauss são:

I. Trocar a linha i pela linha j
II. Multiplicar uma linha por uma constante não nula α
III. Substituir a linha i por ela mesma mais um múltiplo da linha j, isto é,

$$\ell_i \leftrightarrow \ell_i + \alpha\ell_j$$

Exercício

Utilize o método de eliminação de Gauss para encontrar solução de cada um dos sistemas lineares formulados nos problemas anteriores

ESCALONAMENTO, POSTO E NULIDADE

Matriz escada

Dizemos que uma matriz A está na forma escalonada se:

I. O primeiro elemento não nulo de cada linha é 1
II. A coluna do primeiro elemento não nulo de cada linha deve ter os outros elementos nulos
III. Se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então
$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n$$
IV. Qualquer linha nula deve estar abaixo das linhas não nulas

Exercício 1

Verifique quais são as matrizes que estão na forma escada.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercício 2

Calcule o posto e a nulidade da matriz associada a cada um dos sistemas e analise sobre existência e unicidade de solução.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 7 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ \quad\ \ y - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ \quad\ \ y + z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y - w + z = 1 \\ x + y + z - w = 5 \\ \quad\ \ y + z + 2w = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y + z + \ \ w = 5 \\ 2x + \ \ y + z + \ \ w = 4 \\ x + y - z + \ \ w = 5 \\ 2x - y + 2z + w = -1 \end{cases}$

SOLUÇÃO DE SISTEMA LINEAR

Teorema de Existência de Soluções

Um sistema de $\boldsymbol{m}$ equações e $\boldsymbol{n}$ incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

Se as duas matrizes têm o mesmo posto $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}$ a solução será única.

Se as duas matrizes têm o mesmo posto $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{n}$, podemos escolher $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$ incógnitas, e as outras $\boldsymbol{p}$ incógnitas serão dadas em função destas.

Exercício 1

Discuta sobre a existência e unicidade de cada um dos sistemas conforme o Teorema de Existência de soluções.

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 3y - 2z = 1 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 40 = 0 \\ x_1 + x_3 + 20 - 55 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_3 - 30 = 0 \\ x_5 - 10 = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 - 3i_2 = -4 \\ 3i_2 + 5i_3 = 21 \end{cases}$

ESPAÇO VETORIAL

Definição

Dizemos que um conjunto não vazio $\boldsymbol{E}$ é um espaço vetorial real se existirem as operações de soma e multiplicação por um escalar m $\boldsymbol{E}$ tais que:

1. $a + b = a + b$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists\, n \in E$, tal que $\forall a \in E,\ \ n + a = a$
4. $\forall\, a \in E,\ \ \exists\, a' \in \mathrm{E}$ tal que $a + a' = n$
5. $t(a + b) = ta + tb,\ \ para\ todo\ t \in \mathbb{R}$
6. $(t + l)a = ta + la,\ \ para\ quaisquer\ t, l \in \mathbb{R}$
7. $(tl)a = t(la), para\ quaisquer\ t, l \in \mathbb{R}$
8. $1a = a$

Exercício 1

Exiba o elemento neutro da operação de adição do espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3.

Exercício 2

Considere o conjunto $P = \{(x, y, z)\ /\ x - 3y + 2z = 0\}$. Verifique se as operações de soma e multiplicação por um escalar herdadas de $\mathbb{R}^3$ são fechadas em P

Exercício 3

Considere o espaço vetorial $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x > 0\}$ com as operações

- Adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplicação por um escalar $t(x, y) = (x^t, ty)$

a) Exiba o elemento neutro da operação de adição

b) Exiba o elemento simétrico aditivo de um elemento $(x, y) \in V$

Exercício 4

Considere o espaço vetorial $V = \{(x, y)/\ x, y\ \in \mathbb{R}\}$ com as operações

- Adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 5, y_1 + y_2)$
- Multiplicação por um escalar $t(x, y) = (tx + 5(t - 1), ty)$

a) Exiba o elemento neutro da operação de adição

b) Exiba o elemento simétrico aditivo de um elemento $(x, y) \in V$

Exercício 5

Mostre que o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 3 é um espaço vetorial.

Exercício 6

Prove que o conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ y = 2x\}$ é um espaço vetorial.

SUBESPAÇO

Definição

Dizemos que um subconjunto não vazio S de um espaço vetorial E é um subespaço vetorial se as operações são fechadas, isto é, para quaisquer $u, v \in S$ e um escalar $t \in \mathbb{R}$ temos que

$$u + v \in S$$
$$t \cdot u \in S$$

Exercício 1

Mostre que o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2

Mostre que o conjunto $S = \left\{f \in C([0,1]) \ / \ \int_0^1 f(x)dx = 0\right\}$ é um subespaço de $C([0,1])$

Exercício 3

Verifique se o conjunto $U = \{p(x) \in P_3 \ / \ p(1) = p(-1) = 0\}$ é um subespaço de P_3.

Exercício 4

Mostre que $U = \{f \in C([0,1]) \ / \ f(x) = f(-x); \ x \in [0,1]\}$ é um subespaço de $C([0,1])$

Exercício 6

Seja $\mathcal{M}_3$ o conjunto das matrizes de 3 linhas e 3 colunas. Verifique se o conjunto $S = \{A \in \mathcal{M}_3; A^t = A\}$ é um subespaço de $\mathcal{M}_3$.

Exercício 7

Mostre que o conjunto $U = \{(x, y, z);\ x - y + 3z = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 8

Prove que o conjunto $W = \{(x, y, z, t); x - y + z = 0\ e\ y - t = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 9

Verifique se o conjunto $S = \{p(x) \in P_3; p(-1) = 0\ e\ p'(x) = 0\}$ é um subespaço do espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3.

Exercício 10

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial E. Verifique se $U \cup W$ e $U \cap W$ são subespaços de E.

Exercício 11

Sejam U e V subespaços de E. Prove que o conjunto a seguir é um subespaço de E.

$$U + V = \{u + v : u \in U\ e\ v \in V\}$$

COMBINAÇÃO LINEAR

Exercício 1

Escreva o vetor $w = (3,2)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (-1,2)$ e $v_2 = (-1,-2)$.

Exercício 2

Verifique se é possível escrever qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (-2,1)$.

Exercício 3

Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2$ dado por

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} / \ x - y - z = 0 \right\}$$

Determine um sistema de geradores de para U.

Exercício 4

Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \{(x, y, z) \ / \ x + 2y + z = 0\}$$

Determine um sistema de geradores para S.

Exercício 5

Escreva o polinômio $p(x) = 2 - x + 3x^2$ como combinação linear dos polinômios $1, 1 + x$ e $(1 + x)^2$.

Exercício 6

Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifique se a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Pode ser escrita como combinação linear de A_1, A_2 e A_3.

Exercício 7

Encontre um sistema de geradores para o subespaço $W = \{A \in \mathbb{M}_2 \ / A = A^t\}$.

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição

Dizemos que o conjunto de vetores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \cdots \boldsymbol{v_n}$ de um espaço vetorial $\boldsymbol{E}$ é linearmente independente se

$$\boldsymbol{t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 + \cdots + t_n v_n = \vec{0}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0}.$$

Exercício 1

Verifique se os vetores $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3})$, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{2})$ e $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{3}, -\boldsymbol{3}, \boldsymbol{11})$ são linearmente independentes.

Exercício 2

Verifique se os vetores $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{2})$ e $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ são linearmente independentes.

Exercício 3

Verifique se o conjunto $\boldsymbol{G} = \{(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, -\boldsymbol{1})\}$ é linearmente independente.

Exercício 4

Considere os vetores não nulos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ em $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ sendo perpendiculares dois a dois. Prove que são linearmente independentes.

Exercício 5

Mostre que o conjunto $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1} + \boldsymbol{x}, (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{2}}\}$ é linearmente independente.

Exercício 6

Determine um conjunto de geradores do subespaço $\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \ / \ \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \mathbf{3}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$ e verifique se tal conjunto é linearmente independente.

Exercício 7

Mostre que qualquer conjunto com 3 vetores de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ é linearmente dependente.

Exercício 8

Verifique se o conjunto $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{x}, (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\}$ é linearmente independente.

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Definição

Dizemos que um conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset E$ forma uma base para o espaço vetorial E se for gerador de E e linearmente independente.

Exercício 1

Verifique as afirmações:

O conjunto $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base para o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Os vetores $u = (1,1,2)$, $v = (1,-2,0)$ e $w = (3,-3,2)$ formam uma base para o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

O conjunto $\mathcal{B}_2 = \{(0,2,1),(-1,0,-2),(3,2,0)\}$ forma uma base para $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2

Determine uma base para o conjunto

$$W = \{(x,y,z,t) \;/\; x - y + 2t = 0 \;\; e \;\; z - 3x = 0\}.$$

Exercício 3

Mostre que o conjunto $\{1, x, x^2\}$ forma uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

Exercício 4

Mostre que o conjunto $\{\mathbf{1}, \mathbf{1}+\boldsymbol{x}, (\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}\}$ forma uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

Exercício 5

Considere $\boldsymbol{\mathcal{B}_1} = \{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ e $\boldsymbol{B_2} = \{(\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{1},-\mathbf{2})\}$ duas bases para $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

a) Escreva cada vetor da base $\boldsymbol{\mathcal{B}_1}$ como combinação linear dos vetores de $\boldsymbol{\mathcal{B}_2}$
b) Escreva os vetores da base $\boldsymbol{\mathcal{B}_2}$ como combinação linear dos vetores da base $\boldsymbol{\mathcal{B}_1}$

Exercício 6

Determine uma base para o subespaço

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{\mathbf{3}} \ / \ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}}\}.$$

Exercício 7

Mostre que o conjunto $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\right\}$ forma uma base para o espaço das matrizes $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$.

MUDANÇA DE BASE

Proposição

Seja E um espaço vetorial, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \cdots v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \cdots, u_n\}$ duas bases distintas de E. Existe uma matriz associada a mudança da base $\mathcal{B}_1$ para base $\mathcal{B}_2$ no qual cada coluna j dessa matriz são as coordenadas de v_j em relação a base $\mathcal{B}_2$.

Exercício 1

Escreva a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1 = \{(1,0), (0,1)\}$ para a base $\mathcal{B}_2 = \{(1,2), (-1,-1)\}$

Exercício 2

Escreva a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ para a base $\mathcal{B}_2 = \{(1,2,0), (-1,0,1), (2,2,0)\}$ e utilize a matriz encontrada para obter as coordenadas dos vetores a seguir em relação à base $\mathcal{B}_2$.

a) $u = (1,1,1)$

b) $v = (-2,1,1)$

c) $w = (3,0,2)$

Exercício 3

Escreva a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1,0), (0,1,0), (2,2,1)\}$ para a base $\mathcal{B}_2 = \{(1,2,0), (-1,0,1), (2,2,0)\}$

Exercício 4

Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3$ com a base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, 1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3\}$$

a) Encontre a matriz de mudança da base $\gamma = \{1, x, x^2, x^3\}$ para base $\mathcal{B}$.

b) Encontre as coordenadas do polinômio $p(x) = 2 - x + x^2$ em relação a base $\mathcal{B}$ sem utilizar a matriz de mudança de base

c) Refaça o item anterior utilizando a matriz de mudança de base.

Exercício 5

Considere M_2 o espaço das matrizes 2×2. Dadas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ a seguir escreva a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Exercício 6

Encontre a matriz de mudança de base que consiste na rotação no sentido anti-horário de ângulo θ no plano cartesiano**.**

Exercício 7

Encontre a matriz de mudança de base que consiste na rotação de ângulo θ e φ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$**.**

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição

Sejam E, F espaços vetoriais reais. Dizemos que a função $T: E \to F$ é uma transformação linear se para quaisquer $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v).$$

Exercício 1

Verifique se $T(x, y, z) = (x - z, y)$ é uma transformação linear.

Exercício 2

Verifique se $T(x, y, z, t) = (x + t, y - 2z, t - 1)$ é uma transformação linear.

Exercício 3

Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,2,0)$ e $T(-2,3) = (0,2,-1)$.

Exercício 4

Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,1) = (1,2,0)$ e $T(0,2,3) = (0,1,-1)$ e $T(-2,-1,0) = (2,3,3)$.

Exercício 5

Considere a transformação linear $T(x, y, z) = (y - 2z, z, x + y)$. Encontre o conjunto de vetores $w \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(w) = \vec{0}$.

Exercício 6

Sejam T e S transformações lineares. Prove que $T \circ S$ também é uma transformação linear.

Exercício 7

Sejam T e S transformações lineares. Prove que $T + S$ também é uma transformação linear.

Exercício 8

Prove que para toda transformação linear a imagem do vetor nulo é um vetor nulo.

Exercício 9

Seja $T: E \to F$ uma transformação linear. Considere $S \subset E$ um subespaço de E. Verifique se o conjunto

$$Im(S) = \{T(v) \in F; v \in E\}$$

também é um subespaço de F.

MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Exercício 1

Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (2y - x, x + y)$$

a) Escreva a matriz de T em relação a base canônica.

b) Escreva a matriz de T em relação da base $\mathcal{B} = \{(1,2), (1, -2)\}$.

c) Escreva a matriz $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ onde $\mathcal{B}_1 = \{(1,2), (-2,3)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(-1,0), (0,1)\}$.

Exercício 2

Encontre a matriz da transformação linear $D: P_4 \to P_3$ dada por $D\big(p(x)\big) = p'(x)$ considerando as bases usuais de P_4 e P_3.

Exercício 3

Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,1) = (2,2,0)$ e $T(0,2,1) = (0,1,1)$ e $T(-2, -1,0) = (2,0,3)$ e escreva sua matriz considerando a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4

Escreva a matriz da transformação linear de rotação no sentido anti-horário de ângulo θ o espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$

Exercício 5

Escreva a matriz da transformação linear de rotação de ângulo θ e φ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$

Exercício 6

Determine a matriz da transformação linear $T: P_2 \to P_3$ dada por $T(p(x)) = p''(x) + xp(x)$ considerando as bases usuais de P_2 e P_3.

Exercício 7

Dada uma transformação linear $T: P_2 \to \mathbb{R}$ e considerando a base usual de P_2, determine sua matriz onde

$$T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx + p'(0)$$

Exercício 8

Calcule o núcleo da transformação linear cuja matriz é dada por

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 9

Calcule o núcleo e a imagem da transformação linear cuja matriz é dada por

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 10

Seja $F: P_2 \to P_3$ uma transformação linear dada por

$$F(p(x)) = (x+1)p(x)$$

Determine a matriz de F em relação a bases $\mathcal{B}_1 = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ para P_2 e P_3 respectivamente.

Exercício 11

Calcule a matriz da transformação linear $T: M_2 \to P_2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b + c + d)x + (2a - b - c)x^2$$

considerando as bases canônicas de M_2 e P_2.

NÚCLEO E IMAGEM

Definições

- Seja $T: E \to F$ uma transformação linear. O núcleo de T é definido por

$$\ker(T) = \{v \in E \ / T(v) = 0\}.$$

- Seja $T: E \to F$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto definido por

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in F \quad w = T(v) \; para \; algum \; v \in E\}.$$

- Uma transformação linear $T: E \to F$ é injetora se

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v.$$

- Uma transformação linear $T: E \to F$ é sobrejetora se

$$Im(T) = F.$$

Exercício 1

Calcule o núcleo da transformação linear dada por

$$T(x, y) = (x + y, 2y - x).$$

Exercício 2

Calcule a dimensão da imagem da transformação linear

$$T(x, y, z) = (y, x + y, 2y).$$

Exercício 3

Determine uma base para o núcleo da transformação linear $T: P_2 \to P_3$ dada por

$$T\big(p(x)\big) = p'(x) + xp(x).$$

Exercício 4

Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}.$$

Exercício 5

Determine uma base para o núcleo e a imagem da transformação linear $T: P_4 \to P_4$ definida por

$$\boldsymbol{T}\big(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{p}''(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}).$$

Exercício 6

Considere a transformação linear $T: P_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$T\big(p(x)\big) = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx + p'(0).$$

Determine uma base para o núcleo e a imagem de T.

Exercício 7

Mostre que o núcleo de uma transformação linear $T: E \to F$ é um subespaço de E.

Exercício 8

Mostre que a imagem de uma transformação linear $T: E \to F$ é um subespaço de F.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Exercício 1

Verifique se existe uma base de autovetores para o operador linear $F(x,y) = (x-y, 2x)$. Caso exista escreva sua matriz diagonal.

Exercício 2

A matriz do operador linear $T(x,y) = (-3x+4y, -x+2y)$ é diagonalizável?

Exercício 3

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (3x, 3y, -4x+5y-z).$$

Podemos afirmar que existe uma base para $\mathbb{R}^3$ formada de autovetores de T?

Exercício 4

Verifique se o operador linear $T(x,y,z) = (3x, -3x, -4x+5y-z)$ diagonalizável.

Exercício 5

Verifique se o operador linear $T(x,y,z) = (3x, 4x+y+z, -x+2z)$.

Exercício 6

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (2x+y, -3y, 8x+5z).$$

Podemos afirmar que existe uma base para $\mathbb{R}^3$ formada de autovetores de T?

Exercício 7

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (3x, 2x - 2y + 3z, x + z).$$

Podemos afirmar que existem 2 autovalores distintos e, portanto, não é diagonalizável?

PRODUTO INTERNO

Definição

Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno sobre E é uma função que associa cada par de vetores u e v a um número real, denotado por $u \cdot v$ e possui as seguintes propriedades:

P1. $v \cdot v \geq 0$ para todo $v \in E$, $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

P2. $u \cdot v = v \cdot u$

P3. $tv \cdot u = t(v \cdot u)$, $t \in \mathbb{R}$

P4. $(u + w) \cdot v = u \cdot v + w \cdot v$

Definição

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno. Considerando $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ordenada de E, definimos a matriz do produto interno com relação à base β por

$$[a_{ij}] = v_i \cdot v_j$$

Exercício 1

Considere o espaço vetorial real das matrizes 3×3. Mostre que a expressão a seguir é um produto interno

$$A \cdot B = tr(B^t A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \qquad \forall A, B \in M_3$$

Exercício 2

Mostre que a expressão a seguir é um produto interno em $\mathbb{R}^2$ e determine a sua matriz

$$\boldsymbol{u \cdot v = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2, \quad u = (x_1, y_1)\ e\ v = (x_2, y_2)}$$

Exercício 3

Mostre que a aplicação

$$u \cdot v = x_1 y_1 - x_1 y_2 - y_1 x_2 + 4 x_2 y_2$$

Define um produto interno em $\mathbb{R}^2$ onde , $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Determine a matriz do produto interno com relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Exercício 4

Considere o espaço vetorial real P_3. Mostre que a expressão a seguir é um produto interno e determine a matriz desse produto interno considerando a base $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$.

$$p \cdot q = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx \quad ; \forall \; p, q \in P_2$$

Exercício 5

Seja $\alpha = \{(1,3), (2,1)\}$ uma base do espaço $\mathbb{R}^2$. Construa uma base ortonormal a partir da base α.

Exercício 6

Construa uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir da base $\beta = \{(1,0,2), (-3,1,0), (-1,2,0)\}$.

Exercício 7

Construa uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir da base $\beta = \{(4,0,1), (2,1,0), (0,2,0)\}$.

Exercício 8

Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais. Mostre que esse conjunto é linearmente independente.

NORMA

Definição

Seja E um espaço vetorial real. Uma norma $\| \ \|$ em E é uma função que associa cada vetor $v \in E$ a um número real de modo que:

N1. $\|v\| \geq 0$

N2. $\|tv\| = |t|\|v\|, \ t \in \mathbb{R}$

N3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Um espaço vetorial com uma norma definida é chamado de *espaço vetorial normado.*

Teorema

Seja E um espaço vetorial com produto interno. A expressão a seguir é uma norma

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Dizemos que uma norma proveniente do produto interno.

Exercício 1

Considere um vetor $v = (x, y)$ no espaço $\mathbb{R}^2$. Mostre que a definição a seguir é uma norma.

$$\|v\| = |x| + |y|$$

Essa norma é chamada de *norma da soma*. Dê uma interpretação geométrica para essa norma.

Exercício 2

Considere um vetor $v = (x, y)$ no espaço $\mathbb{R}^2$. Mostre que a definição a seguir é uma norma.

$$\|v\| = \max\{|x|, |y|\}$$

Dê uma interpretação geométrica para essa norma, chamada de *norma do máximo*.

Exercício 3

Considere um espaço vetorial com a norma proveniente de um produto interno. Prove que os vetores $u+v$ e $u-v$ são ortogonais se, e somente se, $\|u\| = \|v\|$.

Exercício 4

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e a norma proveniente do produto interno. Dados elementos $u = (1,1,0)$ e $v = (0,1,1)$, determine o elemento $w \in \mathbb{R}^3$ de modo que $\|w\| = 1$ e $u \cdot w = v \cdot w$. Dê uma interpretação geométrica.

Exercício 5

Considere o espaço vetorial E com a norma proveniente do produto interno. Mostre que

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

OPERADORES ORTOGONAIS

Definição

Seja E um espaço de dimensão finita e α uma base ortonormal. Dizemos que $A: E \to E$ é um operador linear ortogonal quando sua matriz em relação a base α é uma matriz ortogonal, isto é,

$$A \cdot A^t = I$$

Exercício 1

Ache os valores para a e b tais que $\begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

Exercício 2

Seja E um espaço vetorial e $\alpha = \{v_1, v_2 v_3\}$ uma base ortonormal. Mostre que $\{Tv_1, Tv_2, Tv_3\}$ também é uma base ortonormal.

Exercício 3

Seja $T: E \to E$ um operador linear ortogonal no espaço vetorial E com produto interno. Mostre que T preserva o produto interno, isto é,

$$Tu \cdot Tv = u \cdot v$$

Exercício 4

Seja $T: E \to E$ um operador linear ortogonal no espaço vetorial E com produto interno. Mostre que T preserva a norma, isto é,

$$\|Tv\| = \|v\|.$$

Exercício 5

Mostre que uma transformação ortogonal do plano no plano deixa invariante a distância entre dois pontos, isto é, dados vetores u e v vetores quaisquer

$$\|Tu - Tv\| = \|u - v\|.$$

OPERADORES AUTO-ADJUNTOS

Definição

Seja E um espaço de dimensão finita e α uma base ortonormal. Dizemos que $A: E \rightarrow E$ é um operador linear auto-adjunto quando sua matriz em relação a base α é uma matriz simétrica (ou hermitiana), isto é,

$$A = A^t$$

Exercício 1

Seja $T(x,y,z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ com produto interno canônico.

a) Mostre que T é um operador auto-adjunto, mas não ortogonal;
b) Se $v = (2,-1,5)$ e $w = (3,0,1)$, verifique que $Tv \cdot w = v \cdot Tw$;
c) Exiba uma base de autovetores de T e verifique que é uma base ortogonal. A partir dessa base, escreva uma base ortonormal.

Exercício 2

Discuta com seus colegas sobre a seguinte pergunta: Todo operador auto-adjunto é diagonalizável?

Exercício 3

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação a base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Mostre que esse operador é auto-adjunto e encontre uma base ortonormal de autovetores.

Exercício 4

Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Mostre que esse operador é auto-adjunto e encontre uma base ortonormal de autovetores.