ÁLGEBRA LINEAR

NÚCLEO E IMAGEM

$T: U \to W$

$Tv = \lambda v$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$v \mapsto \|v\|$

$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$W \oplus U$

$\det(T - \lambda I) = 0$

$T_1(x, y) = 2(x+3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$A(x, y, z) = (x - y,\ z + y)$

$E(h, k) = (a+h)^2 + (b+k)^2 - f(a, b) - 2ah - 2bk$

Imagem de uma transformação linear

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (x, x - y, x)$$

e considere o vetor $w = (2,0,1)$. É possível encontrar algum vetor $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = w$?

Imagem de uma transformação linear

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (x, x - y, x)$$

e considere o vetor $w = (2,0,1)$. É possível encontrar algum vetor $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = w$?

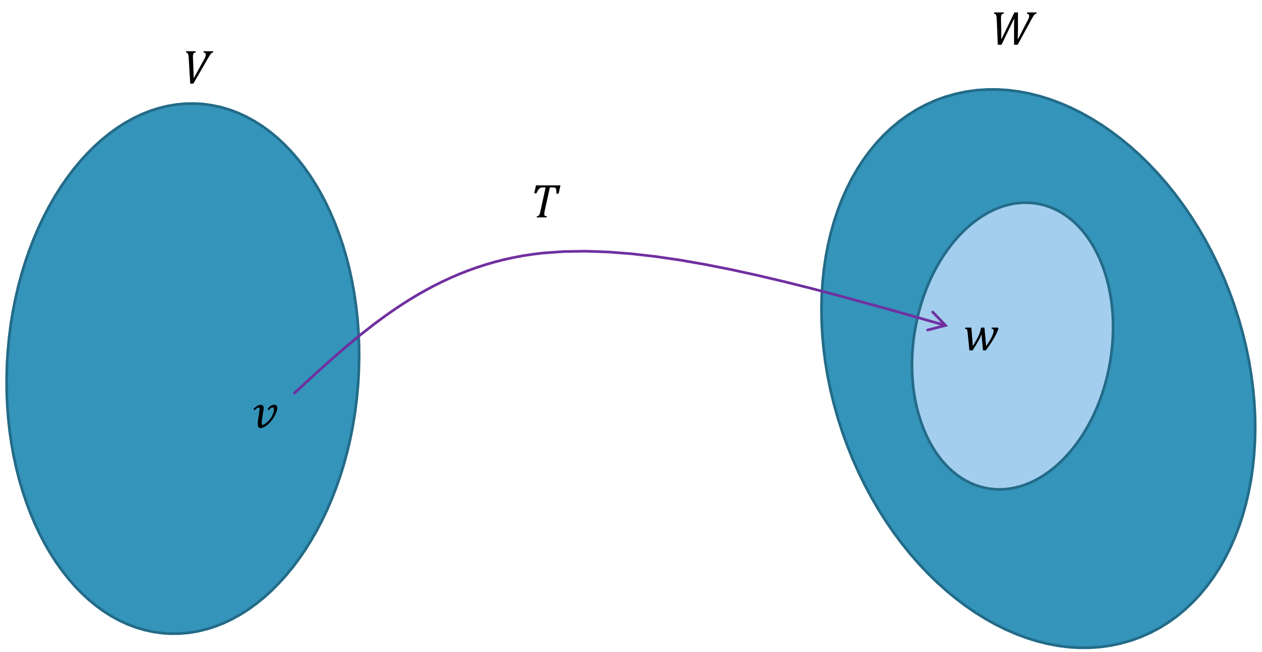
Resposta: não é possível!

Imagem de uma transformação linear

Seja $T: V \rightarrow \mathrm{W}$ uma transformação linear. A imagem de T, denotada por $Im(T)$, é um subconjunto de W e, é definido por

$$Im(T) = \{w \in W; w = T(v)\,, v \in V\}$$

Imagem de uma transformação linear



Dizemos que $w \in Im(T)$

se existir um vetor $v \in$

V tal que $w = T(v)$.

Exemplo 1

Considere $T(x,y,z) = (2y, z+y+x)$. Verifique se o vetor $w = (2,1) \in Im(T)$.

Exemplo 1

Vamos verificar se existe algum vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = w$, isto é,

$$T(x, y, z) = (2y, z + y + x) = (2,1)$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2y = 2 \\ z + y + x = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $y = 1$ e $z = -x$.

Exemplo 1

Concluímos que w é imagem de qualquer vetor da forma

$$v = (x, 2, -x)$$

Exemplo 2

Considere a transformação linear cuja matriz é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Observe que para todo $v = (x, y, z)$ temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A imagem é gerada pelas colunas de A

Verificar a existência de solução de um sistema linear é equivalente a analisar a imagem de uma transformação linear

Exemplo 3

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 2 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

Verificar a existência de solução é equivalente a analisar se o vetor $(0,2,3)$ pertence à imagem da transformação linear

$$T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y, x - 3y + 2z)$$

Exemplo 3

Observe que

$$T(1,0,1) = (0,2,3)$$

Portanto, o vetor $(0,2,3)$ pertence à imagem.

Exemplo 4

Encontre a imagem da transformação linear

$$S(x,y) = (x, 2x, -x)$$

A imagem de S é o conjunto de todos os vetores

$$w = (x, 2x, -x) \; = x(1,2,-1)$$

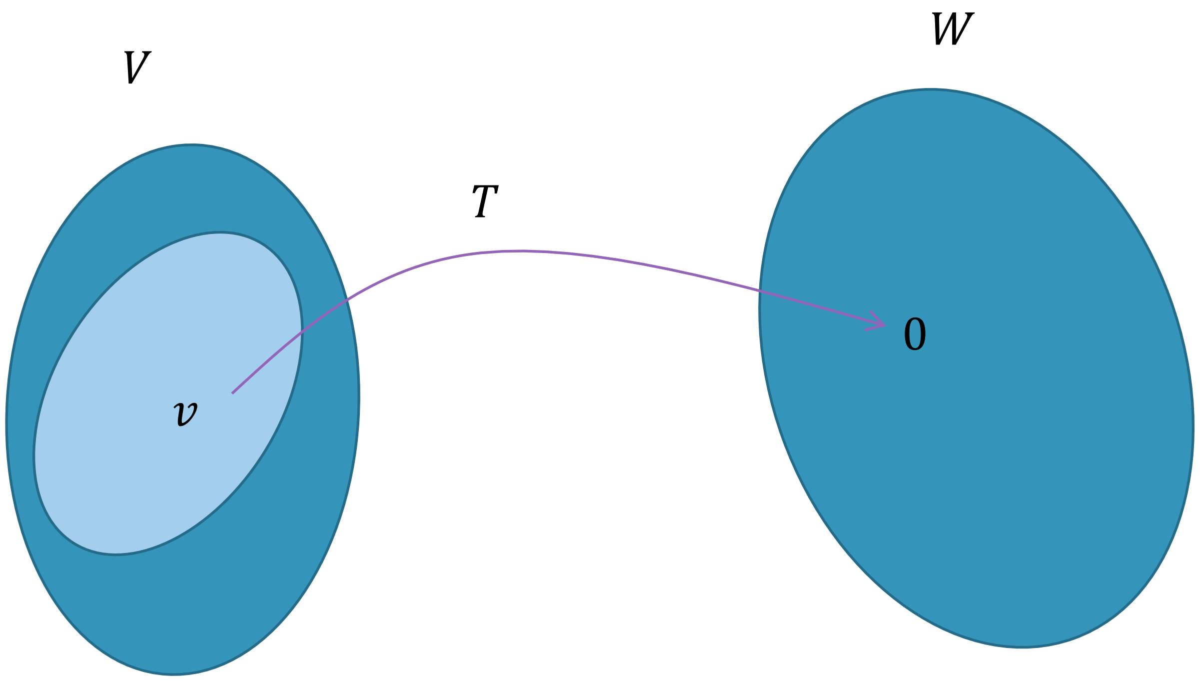
Logo é gerada pelo vetor $(1,2,-1)$.

Núcleo de uma transformação linear

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por $N(T)$, é um subconjunto de V e, é definido por

$$N(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Núcleo de uma transformação linear



Dizemos que $v \in N(T)$

se $T(v) = 0$.

Exemplo 5

Encontre o núcleo da transformação linear $S(x, y, z) = (y, x + z)$.

O núcleo da transformação linear é o conjunto de todos os vetores $v =$
(x, y, z) tais que

$$S(x, y, z) = (0,0)$$

$$(y, x + z) = (0,0)$$

Obtemos que $y = 0$ e $z = -x$. Então os vetores do núcleo de S são da forma

$$v = (x, 0, -x) = x(1,0,-1)$$

Exemplo 6

Encontre o núcleo da transformação linear $T(x, y, z) = (2y + z, x + z, z)$.

O núcleo da transformação linear é o conjunto de todos os vetores $v = (x, y, z)$ tais que

$$T(x, y, z) = (0,0,0)$$

$$(2y + z, x + z, z) = (0,0,0)$$

Obtemos que $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.

O núcleo de T possui apenas o vetor nulo.

Exercício 1

Prove que a imagem de uma transformação linear $T: V \to U$ é um subespaço vetorial de U.

Sejam $u_1, u_2 \in Im(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Precisamos mostrar que as operações são fechadas.

Exercício 1

Como $u_1, u_2 \in Im(T)$ então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que

$$u_1 = T(v_1)$$

$$u_2 = T(v_2)$$

Somando u_1 e u_2 temos

$$u_1 + u_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$$

Concluímos que $u_1 + u_2$ é a imagem de $v_1 + v_2$ e, portanto, a soma é fechada.

Exercício 1

Falta provar que a multiplicação por um escalar é fechada!

Exercício 1

Como

$$u_1 = T(v_1)$$

Multiplicando u_1 por λ temos

$$\lambda u_1 = \lambda T(v_1) = T(\lambda v_1)$$

Concluímos que λu_1 é a imagem de λv_1. Logo a multiplicação por escalar também é fechada.

Exercício 2

Prove que o núcleo de uma transformação linear $T: V \to U$ é um subespaço vetorial de V.

Considere $v_1, v_2 \in N(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Precisamos mostrar que as operações são fechadas.

Exercício 2

Como $v_1, v_2 \in N(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0.$$

Além disso,

$$T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Logo, as operações são fechadas.

Transformação linear injetora

Considere a transformação linear

$$T(x, y, z) = (y, x + z)$$

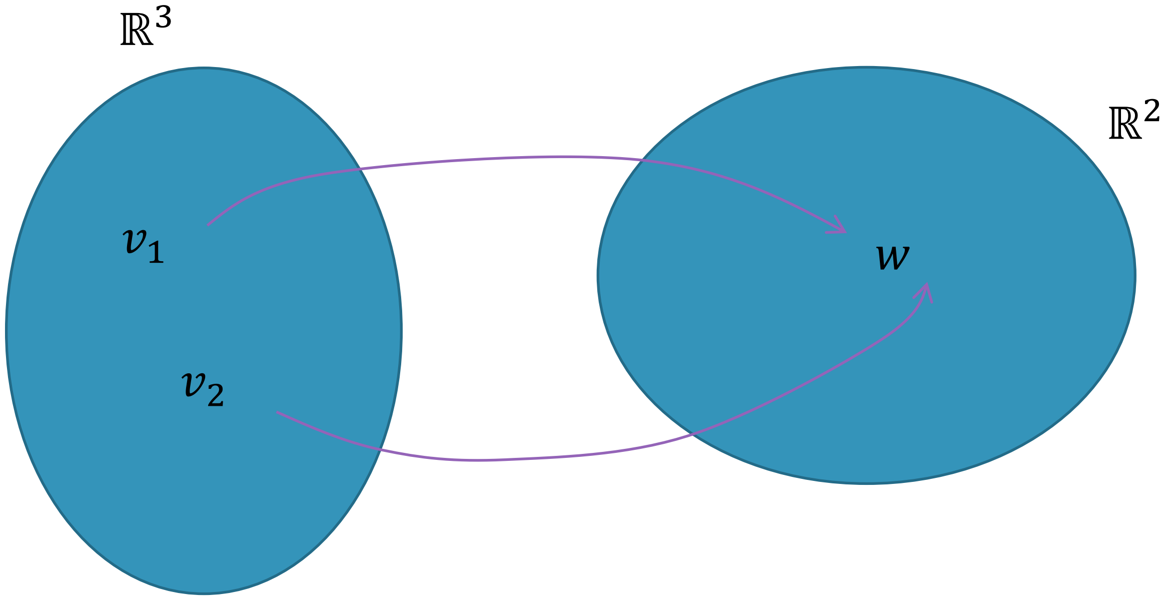
Observe que

$$T(2,2,3) = (2,5)$$

$$T(3,2,2) = (2,5)$$

Assim, temos dois vetores distintos que possuem a mesma imagem.

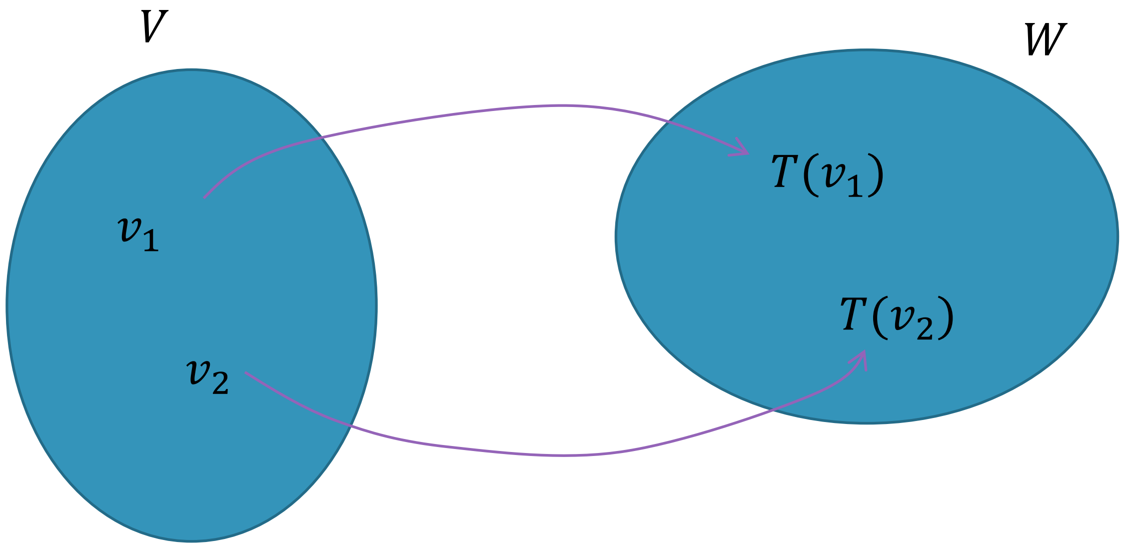
Transformação linear injetora



Transformação linear injetora

Uma transformação linear $T: V \to W$ é dita injetora se para quaisquer vetores distintos $v_1, v_2 \in V$ tem-se que suas imagens são distintas.

$$v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2)$$



Transformação linear injetora

Uma transformação linear $T: V \to W$ é dita injetora se

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

Exercício 3

Prove que a transformação linear $T(x, y) = (x + y, 2x, y - x)$ é injetora.

Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ tais que

$$T(v_1) = T(v_2).$$

Temos que provar que $v_1 = v_2$.

Sendo

$$(x_1 + y_1, 2x_1, y_1 - x_1) = (x_2 + y_2, 2x_2, y_2 - x_2)$$

podemos observar na segunda coordenada que $x_1 = x_2$ e substituindo na primeira coordenada teremos que $y_1 = y_2$. Logo $v_1 = v_2$.

Exercício 4

Prove que se $T: V \to \mathrm{W}$ é uma transformação linear então a imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W, isto é,

$$T(0_V) = 0_w.$$

Considere um vetor qualquer $v \in W$. Temos que

$$T(0_V) = T(v - v) = T(v) - T(v) = 0_w$$

Transformação linear injetora

Teorema: Uma transformação linear $T: V \to \mathrm{W}$ é injetora se, e somente se, o seu núcleo contém apenas o vetor nulo.

Demonstração:

Seja $v \in N(T)$, então

$$T(v) = 0$$

Como T e injetora e $T(0) = 0$ então $v = 0$.

Transformação linear injetora

Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Precisamos provar que $v_1 = v_2$

Observe que

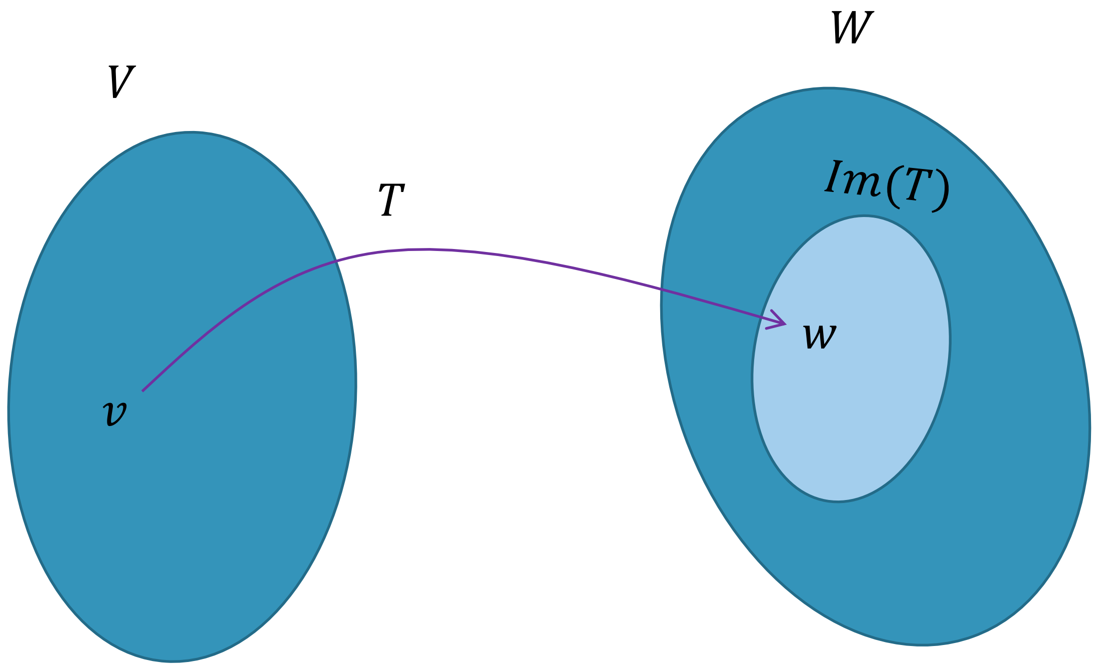
$$T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2) = 0$$

Assim, $v_1 - v_2 \in N(T)$. Como o núcleo contém apenas o vetor nulo, segue que

$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Transformação linear sobrejetora

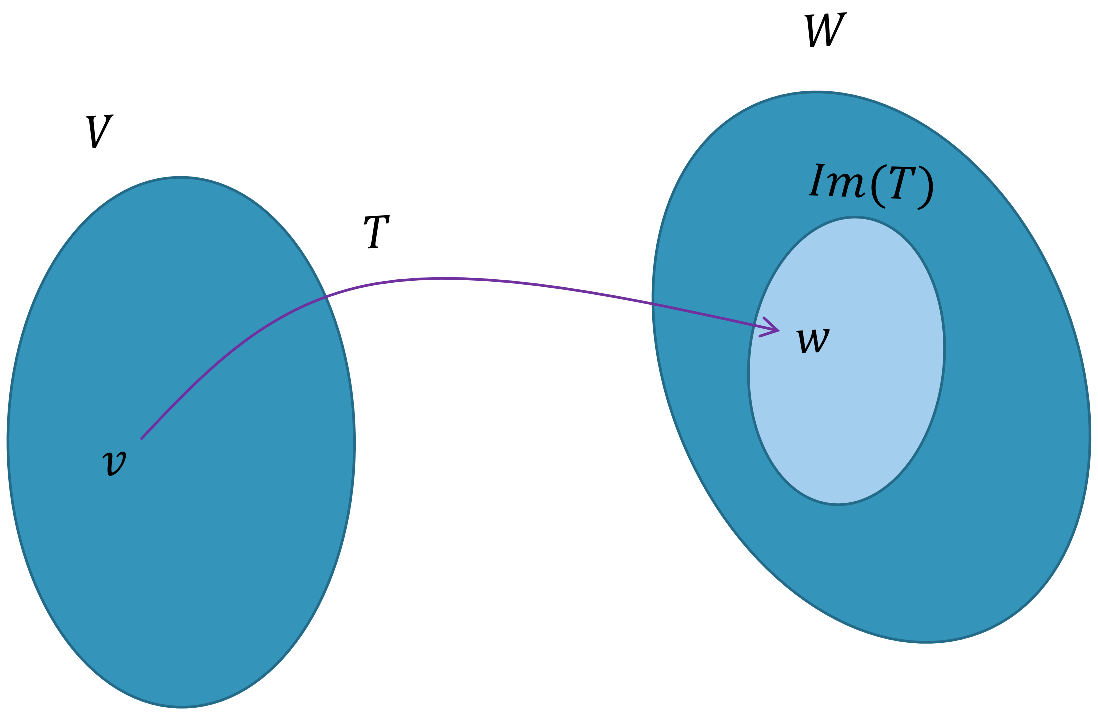
Considere uma transformação linear $T: V \to W$. Dizemos que T é sobrejetora se $Im(T) = W$.



Transformação linear sobrejetora

A transformação linear $T: V \to W$ é sobrejetora se para qualquer vetor $w \in W$, sempre é possível encontrar um vetor $v \in V$ tal que

$$T(v) = w$$



Exercício 5

Determine a imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (x, y, 2x - y)$$

e verifique se é sobrejetora.

Observe que todos os vetores da imagem são da forma

$$(x, y, 2x - y) = x(1,0,2) + y(0,1,-1).$$

Desta forma, temos que a imagem é um subespaço de dimensão 2 cuja base é composta pelos vetores $w_1 = (1,0,2)$ e $w_2 = (0,0,-1)$. Portanto, a transformação não é sobrejetora.