ÁLGEBRA LINEAR

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

$T: U \to W$

$Tv = \lambda v$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \|v\|$

$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$W \oplus U$

$\det(T - \lambda I) = 0$

$T_1(x, y) = 2(x+3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$A(x, y, z) = (x-y,\ z+y)$

$E(h, k) = (a+h)^2 + (b+k)^2 - f(a, b) - 2ah - 2bk$

Transformação linear

Sejam U e W espaços vetoriais. Uma função $T: U \to W$ é uma transformação linear se para quaisquer $u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$T(\lambda u) = \lambda T(u)$$

Exemplo 1

A função $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (z - x, z + 2y)$ é uma transformação linear.

Considere os vetores arbitrários

$$u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Temos que

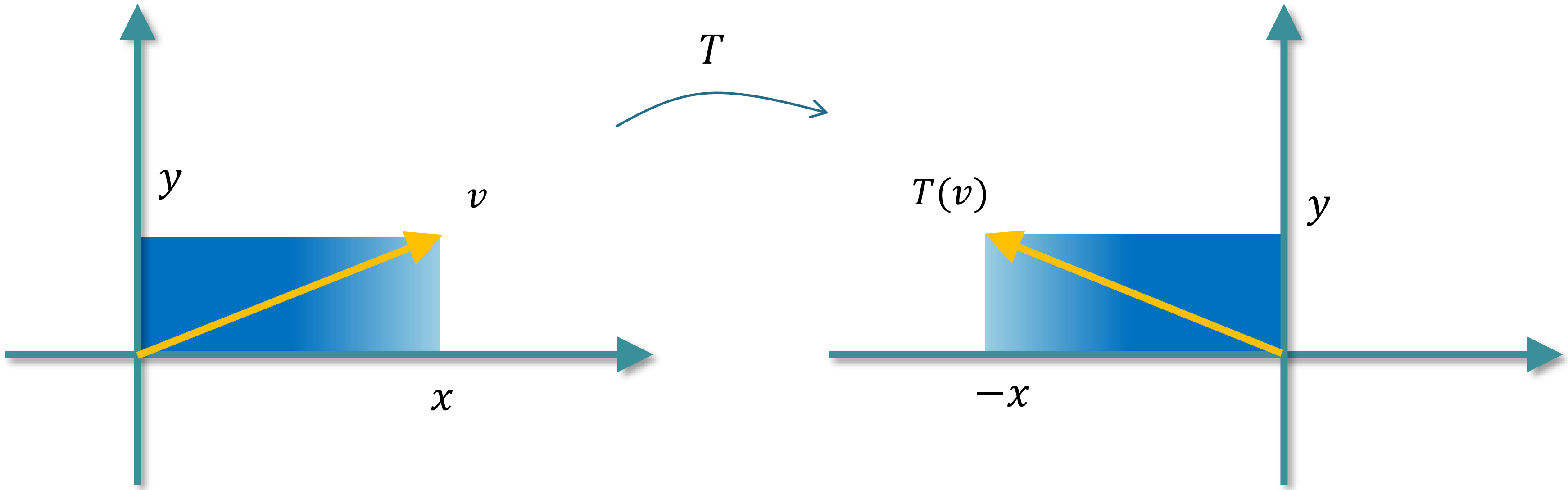
$$\begin{aligned} T(u + v) &= (z_1 + z_2 - x_1 - x_2, z_1 + z_2 + 2y_1 + 2y_2) \\ &= (z_1 - x_1, z_1 + y_1) + (z_2 - x_2, z_2 + y_2) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$T(\lambda u) = (\lambda z_1 - \lambda x_1, \lambda z_1 + 2\lambda y_1) = \lambda(z_1 - x_1, z_1 + y_1) = \lambda T(u)$$

Exemplo 2

Determine um transformação linear em $\mathbb{R}^2$ que faça uma reflexão de qualquer vetor v em relação ao eixo y



Exemplo 2

A função que faz a reflexão em relação ao eixo y é dada por $T(x,y) = (-x,y)$.

Para demonstrar que é linear, consideramos os vetores

$$u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2\ ) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que

$$T(u+v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (-x_1 - x_2, y_1 + y_2) = (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = T(u) + T(v)$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$T(\lambda u) = (-\lambda x_1, \lambda y_1) = \lambda(-x_1, y_1) = \lambda T(u)$$

Transformação linear

Como encontrar uma transformação?

Transformação linear

A transformação linear está bem definida quando conhecemos a imagem dos vetores da base!

Transformação linear

Observe que qualquer vetor $u = (x, y)$ pode ser escrito na forma

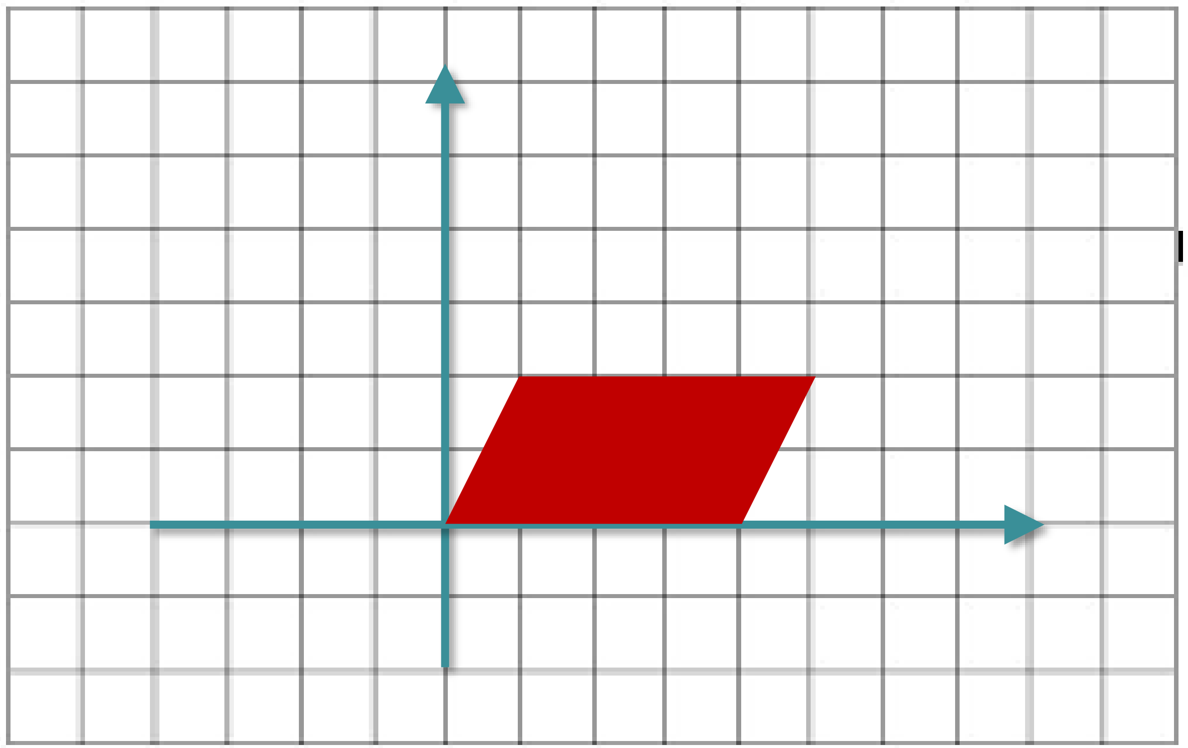
$$u = x(1,0) + y(0,1), \qquad x_i \in \mathbb{R}.$$

Assim, temos que

$$T(x, y) = xT(1,0) + yT(0,1)$$

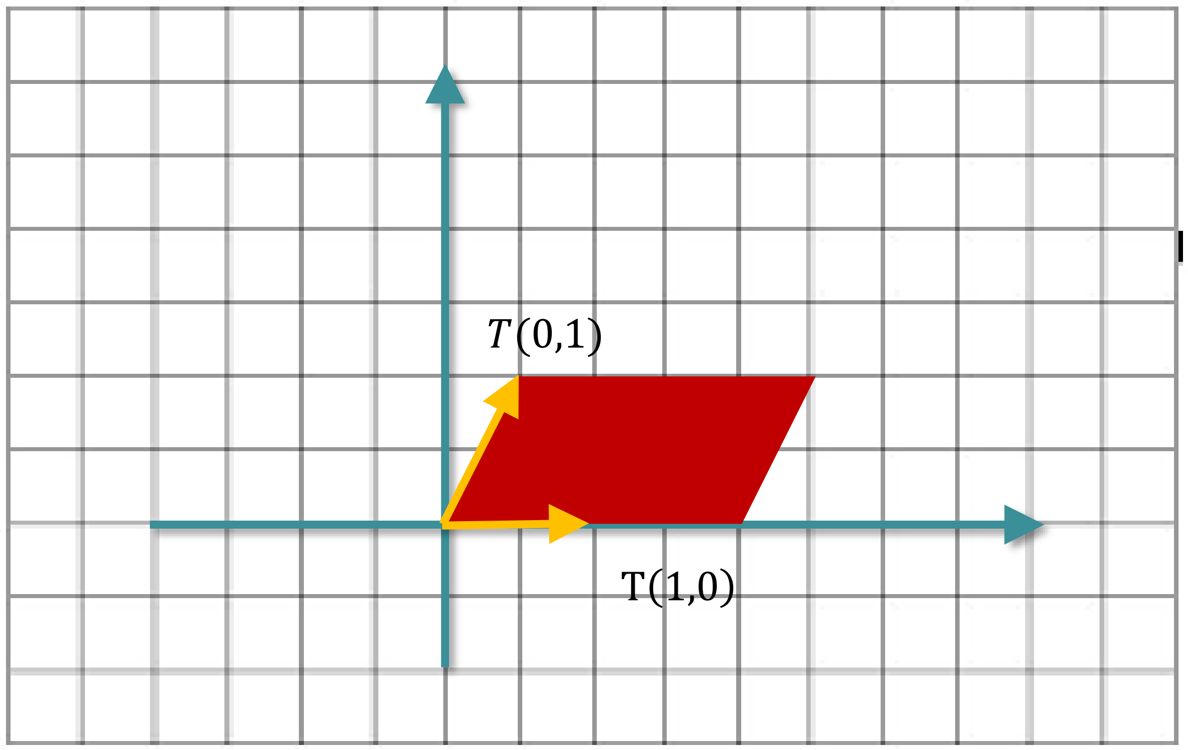
Exemplo 3

Determine a transformação linear que faça a deformação de um retângulo como mostra a figura.



Exemplo 3

Para encontrar a transformação baste determinarmos a imagem dos vetores da base.



Exemplo 3

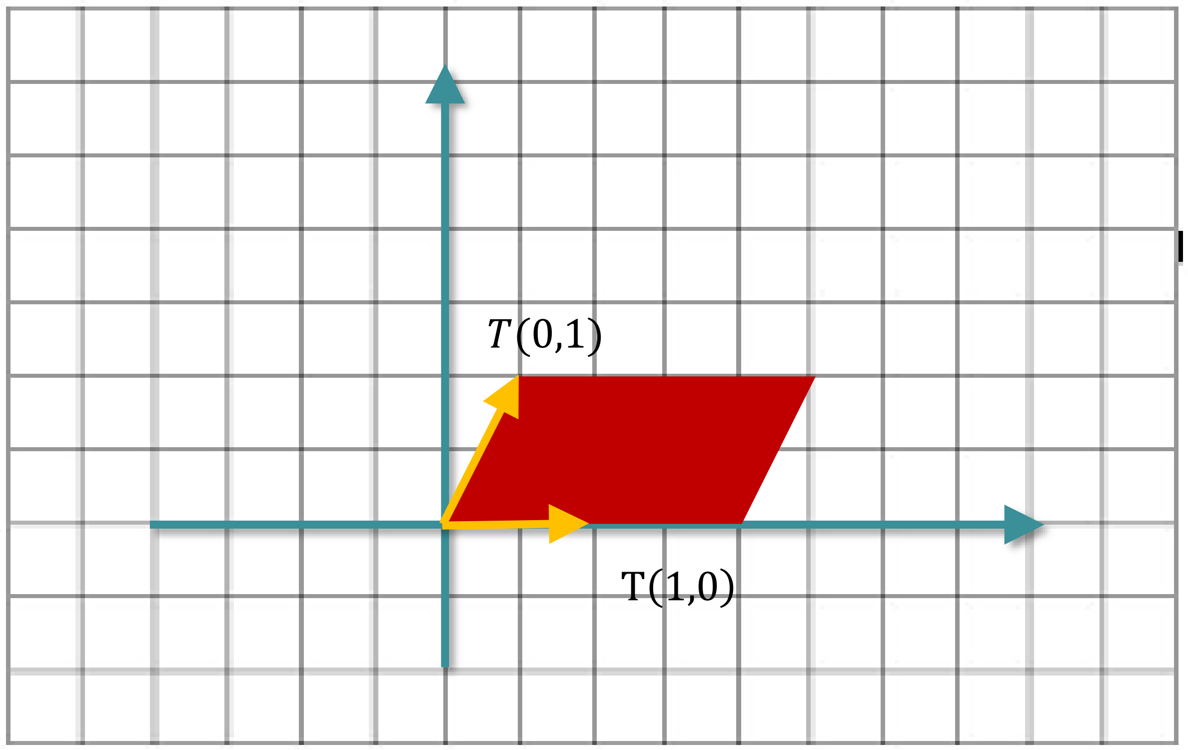
Observe que

$$T(1,0) = (1,0)$$

$$T(0,1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

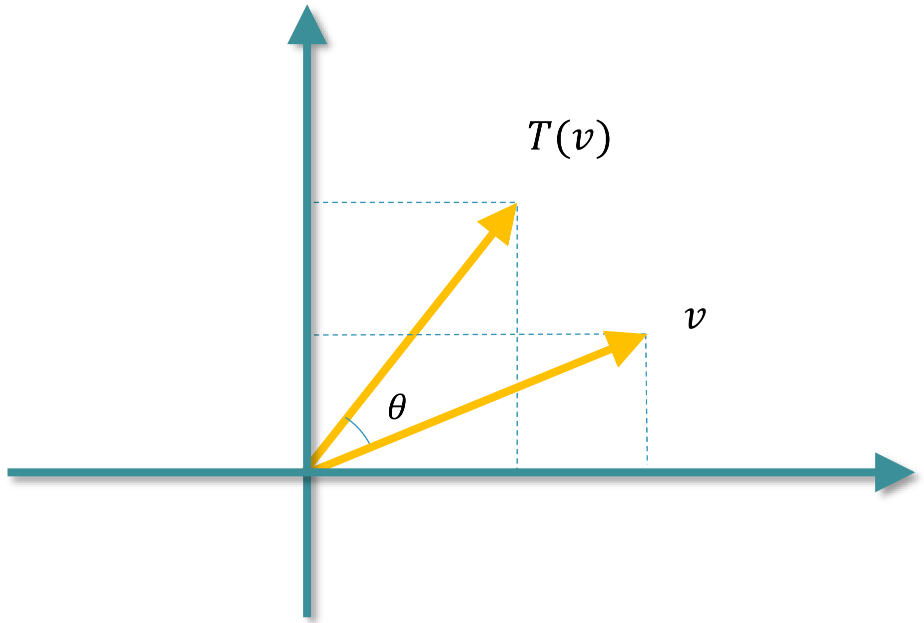
Então

$$T(x,y) = \left(x + \frac{y}{2}, y\right)$$



Exemplo 4

Encontre a transformação linear em $\mathbb{R}^2$ que faça uma rotação em torno da origem no sentido anti-horário de ângulo θ em relação ao eixo x.



Exemplo 4

Para encontrar a rotação é suficiente calcularmos a imagem dos vetores da base de $\mathbb{R}^2$, isto é,

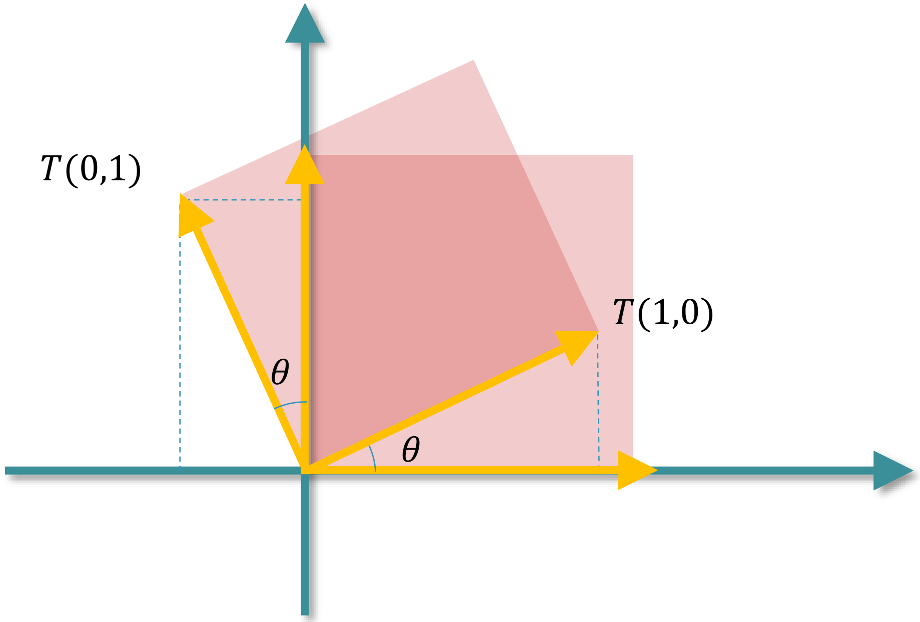
$$T(1,0) \quad \text{e} \quad T(0,1)$$

Exemplo 4

Observe que

$$T(1,0) = (\cos\theta\,, \sin\theta)$$

$$T(0,1) = (-\sin\theta\,, \cos\theta)$$



Exemplo 4

Como

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1)$$

então

$$T(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta\,, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Exemplo 5

Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,1) = (2,2,0)$ e $T(0,2,1) = (0,1,1)$ e $T(-2,-1,0) = (2,0,3)$ e escreva sua matriz considerando a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Como T é linear podemos decompor conforme à seguir

$$T(1,0,1) = T(1,0,0) + T(0,0,1)$$

$$T(0,2,1) = 2T(0,1,0) + T(0,0,1)$$

$$T(-2,-1,0) = -2T(1,0,0) - T(0,1,0)$$

Exemplo 5

Sendo assim, obtemos

$$(2,2,0) = T(1,0,0) + T(0,0,1)$$

$$(0,1,1) = 2T(0,1,0) + T(0,0,1)$$

$$(2,0,3) = -2T(1,0,0) - T(0,1,0)$$

Exemplo 5

Logo,

$$T(1,0,0) = (-4,-2,-3)$$

$$T(0,1,0) = \left(-3\,,-\frac{1}{2},0\right)$$

$$T(0,0,1) = (6,4,3)$$

Matriz de uma transformação linear

Sejam U e W espaços vetoriais de bases $\alpha = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\beta = \{w_1, \cdots, w_m\}$ respectivamente e $T: U \to W$ é uma transformação linear.

Para qualquer vetor $u = (x_1, \cdots, x_n) \in U$ temos que

$$T(u) = x_1 T(u_1) + \cdots + x_n T(u_n)$$

Por outro lado, podemos escrever cada $T(u_i)$ como uma combinação linear da base β.

$$T(u_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \cdots + a_{m1} w_m$$
$$T(u_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \cdots + a_{m2} w_m$$
$$\vdots$$
$$T(u_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \cdots + a_{mn} w_m$$

Exemplo 6

Encontre a matriz da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - y, y - x + z)$$

Exemplo 6

Vamos calcular as imagens de cada vetor da base de $\mathbb{R}^3$ e decompor como combinação linear da base $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 6

Temos que

$$T(1,0,0) = (1,-1)$$

$$T(0,1,0) = (-1,1)$$

$$T(0,0,1) = (0,1)$$

Logo

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7

Encontre a matriz da transformação linear $D: P_2 \rightarrow P_1$ dada por

$$D\big(p(x)\big) = p'(x)$$

Exemplo 7

Considerando $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1, x\}$ as bases de P_2 e P_1 respectivamente. Vamos calcular as imagens de cada elemento base α e decompor como combinação linear dos elementos da base β.

Exemplo 7

Temos que

$$\begin{aligned} D(1) &= \ \ 0 \ \ &= 0\cdot 1 + 0\cdot x \\ D(x) &= \ \ 1 \ \ &= 1\cdot 1 + 0\cdot x \\ D(x^2) &= 2x &= 0\cdot 1 + 2\cdot x \end{aligned}$$

A matriz da transformação linear é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8

Podemos associar a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

à transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = Av,$$

onde $v = \binom{x}{y}$

Exemplo 8

Assim, temos

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 2y \\ x - 4y \end{pmatrix}$$

Transformação linear e matriz

Toda transformação linear entre espaços de dimensão finita está associada a uma matriz.

Toda matriz A está associada à uma transformação linear

Transformação linear e matriz