$T: U \to W$

$Tv = \lambda v$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$v \mapsto \|v\|$

$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$W \oplus U$

ÁLGEBRA LINEAR

BASE

$\det(T - \lambda I) = 0$

$T_1(x, y) = 2(x + 3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$A(x, y, z) = (x - y,\ z + y)$

$E(h, k) = (a + h)^2 + (b + k)^2 - f(a, b) - 2ah - 2bk$

Base

Um conjunto de vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de um espaço vetorial E é uma base ordenada de E se for gerador e linearmente independente

Exemplo 1

Determine uma base para o subespaço

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$$

Exemplo 2

Encontre uma base para o subespaço vetorial de $M_3(\mathbb{R})$

$$U = \{A \in M_3(\mathbb{R}) / A^t = A\}$$

Base de um espaço vetorial

Considere um espaço vetorial E cuja base tem, por exemplo, por dois vetores. Se encontrarmos outra base do espaço E quantos vetores terão nesta base?

Teorema

Seja um espaço vetorial E gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, \ldots, v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente linearmente dependente.

Corolário

Qualquer base de um espaço vetorial sempre tem o mesmo número de elementos.

Dimensão de um espaço vetorial

A dimensão de um espaço vetorial é a quantidade de elementos em sua base.

Coordenadas

Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ordenada para um espaço vetorial E e seja $v \in E$ onde

$$v = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$$

Os números $a_1, a_2, \dots, a_n$ são as coordenadas do vetor v em relação a base β.

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

Considere o conjunto $\beta = \{(1,2),(3,1)\}$ como uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

Escreva as coordenadas do vetor $w = (-5,0)$ em relação a base β.

As coordenadas de w são os escalares a_1 e a_2 tais que

$$(-5,0) = a_1(1,2) + a_2(3,1)$$

$$(-5,0) = (a_1, 2a_1) + (3a_2, a_2)$$

$$(-5,0) = (a_1 + 3a_2, 2a_1 + a_2)$$

Exemplo 3

Da igualdade de pares ordenadas temos o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = -5 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 \; e \; a_2 = -2$$

Temos, então que $w = 1(1,2) - 2(3,1) = (-5,0)$.

Exemplo 3

As coordenadas de w em relação a base β são 1 e -2 e escrevemos

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4

Determine a matriz das coordenadas do vetor $v = 1 + x - x^2$ em relação a base

$$\alpha = \{1, x - 1, 1 + x^2\}$$

As coordenadas de v são os escalares a_1, a_2 e a_3 tais que

$$a_1 + a_2(x - 1) + a_3(1 + x^2) = 1 + x - x^2$$

$$a_1 - a_2 + a_3 + a_2 x + a_3 x^2 = 1 + x - x^2$$

Exemplo 4

Da igualdade de polinômio temos o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 1 \\ \qquad\qquad a_2 = 1 \\ \qquad\qquad a_3 = -1 \end{cases}$$

Sendo assim, $a_3 = -1, a_2 = 1$ e $a_1 = 3$. Temos que as coordenadas de v em relação a base α é

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mudança de base

Considere $\alpha = \{e_1, e_2\}$ e $\beta = \{v_1, v_2\}$ duas bases do espaço $\mathbb{R}^2$. Observe que qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base α da seguinte forma

$$v = xe_1 + ye_2$$

Mudança de base

Como podemos escrever o vetor v como combinação linear dos vetores da base β?

Mudança de base

Observe que cada vetor da base α pode ser escrito como combinação linear da base β

$$e_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2$$

$$e_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$$

Mudança de base

Definimos a matriz de mudança da base α para base β por

$$I_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5

Sejam $\alpha = \{(2,-1),(3,4)\}$ e $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Calcule a matriz I_β^α

Basta escrevermos cada vetor da base α como combinação linear da base β

$$(2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1)$$

$$(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$$

Assim, temos

$$I_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 6

Considere o espaço vetorial P_2. Encontre a matriz de mudança da base $\alpha = \{1, x-1, 1+x^2\}$ para a base $\beta = \{1, x, x^2\}$

Basta escrevermos cada vetor da base α como combinação linear da base β

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x - 1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$1 + x^2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

Exemplo 6

Dessa maneira, temos

$$I_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7

Escreva a matriz de mudança da base $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ para a base $\beta = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$.

Da mesma forma, como feito nos exemplos anteriores, vamos determinar as coordenadas de cada vetor da base α em relação a base β.

Exemplo 7

Vamos encontrar a_1, b_1 e c_1 de modo que

$$(1,0,0) = a_1(1,1,0) + b_1(0,1,1) + c_1(1,0,1)$$

$$(1,0,0) = (a_1 + c_1, a_1 + b_1, b_1 + c_1)$$

Da igualdade de vetores obtemos

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_1 = -\frac{1}{2} \;\; \text{e} \;\; c_1 = \frac{1}{2}$$

Exemplo 7

Da mesma forma, vamos encontrar a_2, b_2 e c_2 de modo que

$$(0,1,0) = a_2(1,1,0) + b_2(0,1,1) + c_2(1,0,1)$$

$$(0,1,0) = (a_2 + c_2, a_2 + b_2, b_2 + c_2)$$

Da igualdade de vetores obtemos

$$a_2 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 = \frac{1}{2} \text{ e } c_2 = -\frac{1}{2}$$

Exemplo 7

Por fim, vamos obter a_3, b_3 e c_3 de modo que

$$(0,0,1) = a_3(1,1,0) + b_3(0,1,1) + c_3(1,0,1)$$

$$(0,0,1) = (a_3 + c_3, a_3 + b_3, b_3 + c_3)$$

Da igualdade de vetores obtemos

$$a_3 = -\frac{1}{2}, \qquad b_3 = \frac{1}{2} \text{ e } c_3 = \frac{1}{2}$$

Exemplo 7

A matriz que muda da base α para base β é

$$I_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exemplo 7

Como funciona a matriz de mudança de base?

Exemplo 7

Se consideramos o vetor $w = (4,2,4)$ e quisermos determinar suas coordenadas na base beta basta utilizarmos a matriz de mudança de base e assim calculamos o produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7

Sendo assim, as coordenadas de w na base β é

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercício

Determine a matriz de mudança da base $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ para a base $\gamma = \{(2,1),(2,1)\}$. Utilize a matriz encontrada para encontrar as coordenadas dos vetores a seguir na base γ.

$a)\ \ v = (-3,1)$

$b)\ \ w = (-1,1)$