ÁLGEBRA LINEAR

COMBINAÇÃO LINEAR E VETORES LI

$T: U \to W$

$Tv = \lambda v$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \|v\|$

$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$W \oplus U$

$\det(T - \lambda I) = 0$

$T_1(x, y) = 2(x+3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$A(x, y, z) = (x - y,\ z + y)$

$E(h, k) = (a+h)^2 + (b+k)^2 - f(a, b) - 2ah - 2bk$

Combinação linear

Dizemos que um vetor $a \in E$ é uma combinação linear dos vetores $a_1, a_2, \ldots a_n \in E$ se existem números reais $t_1, \ldots, \mathrm{t}_n$ tais que

$$a = t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n$$

Exemplo 1

Temos que o vetor $v = (-2, -3, 1)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -2, 1)$ $v_2 = (-1, 1, -1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$, pois observe que

$$v = 2(1, -2, 1) + (-1, 1, -1) - 3(0, 0, 1)$$

Exemplo 2

O polinômio $p(x) = 5 + 3x - 2x^2$ é uma combinação linear dos polinômios $1, x, x^2$.

$$p(x) = 5 \cdot 1 + 3 \cdot x + 2 \cdot x^2$$

Exemplo 3

Todo vetor $v = (x, y, z)$ pode ser decomposto como combinação linear dos vetores $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ da seguinte maneira:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Exercício 1

Escreva o vetor $v = (1,3)$ de modo que seja uma combinação linear dos vetores $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (-2,1)$.

Exercício 2

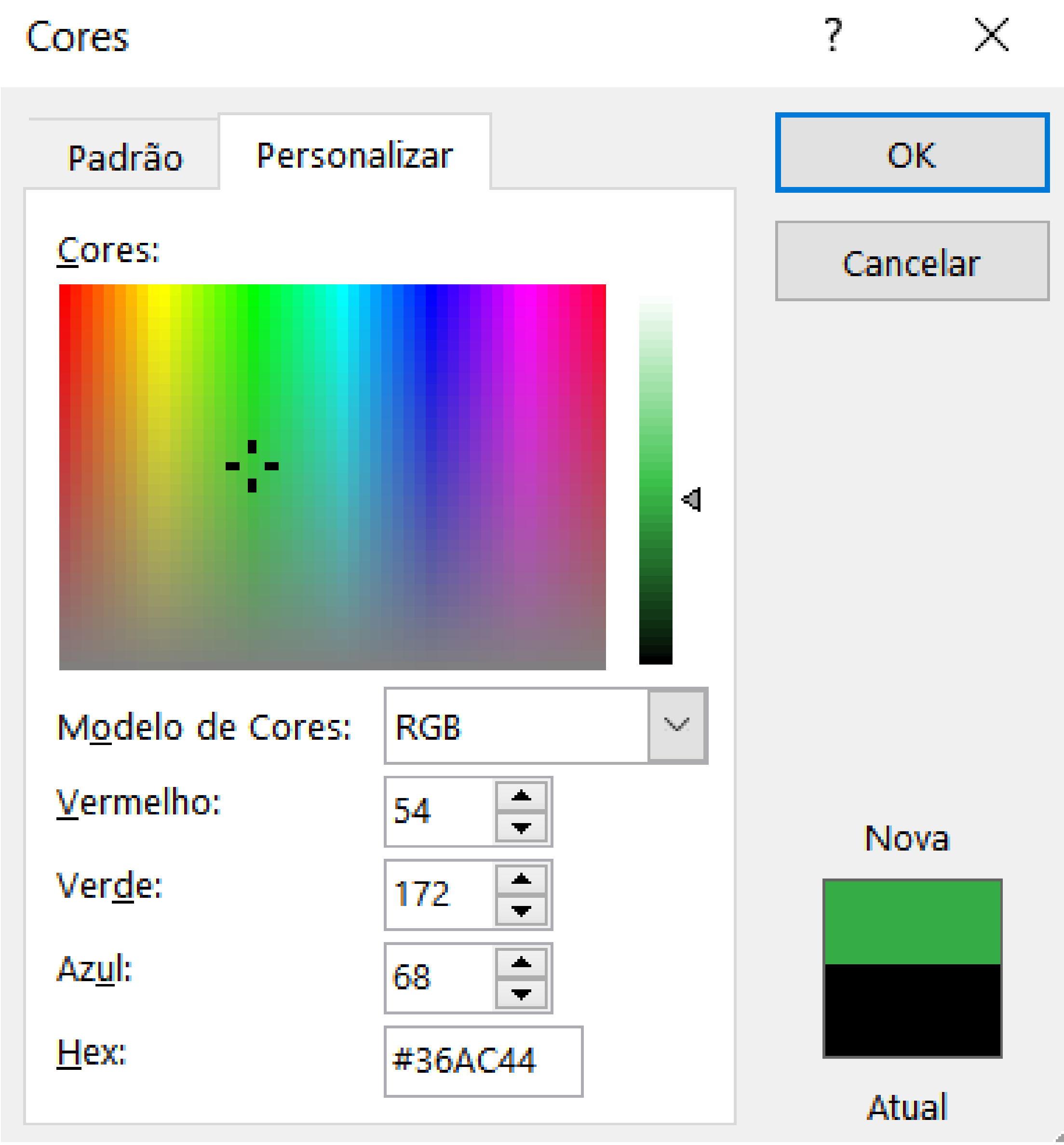
Escreva a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conjunto gerador

No modelo de cores RGB, qualquer cor é uma combinação entre vermelho, verde e azul.

Podemos dizer que essas cores primárias geram todo o espaço de cores.



Conjunto gerador

Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n \in E$ são geradores do espaço vetorial E se qualquer vetor w de E é uma combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Exemplo 4

Os vetores $a = (0,0,1), b = (-1,0,3)$ e $c = (2,1,0)$ são geradores do espaço $\mathbb{R}^3$, pois para qualquer vetor $w = (x, y, z)$ sempre conseguimos encontrar três números t_1, t_2 e t_3 tais que

$$t_1 a + t_2 b + t_3 c = w$$

Como encontrar esses números?

Exemplo 4

Demonstração: considere os números t_1, t_2 e t_3 tais que

$$t_1(0,0,1) + t_2(-1,0,3) + t_3(2,1,0) = w$$

$$(0, 0, t_1) + (-t_2, 0, 3t_2) + (2t_3, t_3, 0) = (x, y, z)$$

$$(-t_2 + 2t_3, t_3, t_1 + 3t_2) = (x, y, z)$$

Exemplo 4

$$(-t_2 + 2t_3, t_3, t_1 + 3t_2) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} -t_2 + 2t_3 = x \\ t_3 = y \\ t_1 + 3t_2 = z \end{cases}$$

Assim temos $t_3 = y, t_2 = 2y - x$ e $t_1 = z - 6y + 3x$

Exemplo 5

Determine um sistema de geradores para o subespaço

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z + t = 0 \;\; e \;\; -x + 2y + z - t = 0\}$$

Demonstração: Para qualquer vetor $a = (x, y, z, t) \in U$ temos que

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$y = -2z \qquad e \quad x = -3z - t$$

$$a = (-3z - t, -2z, z, t) = z(-3, -2, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$$

Exercício 3

Considere o subespaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} / x - y - z = 0 \right\}$$

Determine um sistema de geradores para U

Independência linear

Considere os vetores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)$ *e* $v_3 = (0,0,1)$. É possível escrever v_3 como combinação linear de v_1 com v_2?

Independência linear

Dizemos que o conjunto de vetores $v_1, \dots, v_n$ é linearmente independente se

$$t_1 v_1 + \cdots t_n v_n = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \cdots = t_n = 0$$

Exemplo 6

Prove que os vetores $a = (1,2,1)$, $b = (-1,0,3)$ e $c = (2,2,-4)$ são linearmente independentes.

Demonstração:

Sejam $t_1, t_2, \mathrm{t}_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$t_1(1,2,1) + t_2(-1,0,3) + t_3(2,2,-4) = (0,0,0)$$

Então

$$(t_1 - t_2 + 2t_3, 2t_1 + 2t_3, t_1 + 3t_2 - 4t_3) = (0,0,0)$$

Exemplo 6

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} t_1 - t_2 + 2t_3 = 0 \\ 2t_1 + \qquad 2t_3 = 0 \\ t_1 + 3t_2 - 4t_3 = 0 \end{cases}$$

Logo $t_1 = t_2 = t_3 = 0$

Exemplo 7

Verfique se o conjunto $\{x^2 + 1, x - 1,1\}$ é linearmente independente

Demonstração:

Sejam $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$t_1(x^2 + 1) + t_2(x - 1) + t_3 = 0$$

então

$$t_1x^2 + t_2x + t_1 - t_2 + t_3 = 0$$

Exemplo 7

Logo

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \\ t_1 - t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

Então $t_1 = t_2 = t_3 = 0$.