ÁLGEBRA LINEAR

ESPAÇO VETORIAL

$T: U \to W$

$Tv = \lambda v$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \|v\|$

$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$W \oplus U$

$\det(T - \lambda I) = 0$

$T_1(x, y) = 2(x+3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$A(x, y, z) = (x - y,\ z + y)$

$E(h, k) = (a+h)^2 + (b+k)^2 - f(a, b) - 2ah - 2bk$

Espaço Vetorial

Um conjunto não vazio E é classificado como um espaço vetorial real se existirem as operações fechadas de soma e multiplicação por uma escalar em E tais que:

1) $a + b = a + b$

2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

3) $\exists\, n \in E$, tal que $\forall a \in E,\ n + a = a$

4) $\forall\, a \in E,\ \exists\, a' \in \mathrm{E}$ tal que $a + a' = n$

5) $t(a + b) = ta + tb,\ para\ todo\ t \in \mathbb{R}$

6) $(t + l)a = ta + la,\ para\ quaisquer\ t, l \in \mathbb{R}$

7) $(tl)a = t(la), para\ quaisquer\ t, l \in \mathbb{R}$

8) $1a = a$

Operação Fechada

Considere E um conjunto não vazio. Dizemos que $*$ é uma operação fechada em E se para quaisquer elementos $a, b \in E$ tem-se que $a * b \in E$.

Exemplo 1

Considere o conjunto dos polinômios de grau igual a três e

$$a(x) = x^3 - x + 1, \qquad b(x) = -x^3 + x^2$$

Observe que a soma

$$a(x) + b(x) = x^2 - x + 1$$

não é um polinômio de grau 3. Logo a soma não é fechada nesse conjunto.

Exemplo 2

Seja M o conjunto das matrizes 2×2. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

definimos as operações em M por:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$tA = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ ta_{21} & ta_{22} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2

1) $A + B = B + A$

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) Existe N tal que $N + A = A$ para toda matriz em M?

4) Para toda matriz A em M existe B em M tal que $A + B = N$?

5) Para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se $t(A + B) = tA + tB$

6) Para quaisquer $t, l \in \mathbb{R}$, tem-se $(t + l)A = tA + lA$

7) Para quaisquer $t, l \in \mathbb{R}$, tem-se $(tl)A = t(lA)$

8) Para qualquer matriz em $M_{2\times 2}$ tem-se que $1A = A$

Exemplo 3

Seja $C[0,1]$ o conjunto das funções contínuas $f: [0,1] \to \mathbb{R}$.

Definimos as operações em $C[0,1]$ de modo que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(t \cdot f)(x) = tf(x), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3

1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$

2) $\big(f(x) + g(x)\big) + h(x) = f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$

3) Existe uma função $n(x)$ em C tal que $n(x) + f(x) = f(x)$ para qualquer $f \in C$?

4) Para qualquer função $f \in C$, existe a função $h(x)$ em C tal que $f(x) + h(x) = n(x)$?

5) Para quaisquer função $f, g \in C$, e $t \in \mathbb{R}$ tem-se $t(f(x) + g(x)) = tf(x) + tg(x)$

6) Para qualquer função $f \in C$, e $t, l \in \mathbb{R}$ tem-se $(t + l)f(x) = tf(x) + lf(x)$

7) Para qualquer função $f \in C$, e $t, l \in \mathbb{R}$ tem-se $(tl)f(x) = t(lf(x))$

8) Para qualquer função $f \in C$, tem-se $1f(x) = f(x)$

Alguns espaços vetoriais

- ✓ Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$
- ✓ Conjunto de polinômios
- ✓ Conjunto das matrizes de $n \times m$
- ✓ Conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo

Exemplo 4

Considere o espaço vetorial $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y > 0\}$ com as operações

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$
$$t(x_1, y_1) = (x_1^t, y_1^t)$$

Encontre o elemento neutro da soma e o elemento inverso da soma.

Exemplo 4

Demonstração: Seja $n = (a, b)$ o elemento neutro.

Então para todo $v = (x, y)$

$$(a, b) + (x, y) = (x, y)$$

Por definição

$$(a, b) + (x, y) = (ax, by)$$

Então $n = (1,1)$

Exemplo 4

Dado $w = (x, y)$ considere $u = (a, b)$ o seu inverso aditivo.

Sendo assim, tem-se

$$(x, y) + (a, b) = (1,1)$$

Por definição

$$(a, b) + (x, y) = (ax, by)$$

Então $u = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

Exemplo 5

Considere o conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ com as operações herdadas do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Prove que V é um espaço vetorial.

Exemplo 5

Demonstração: $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

As operações são fechadas em V?

Exemplo 5

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

O elemento neutro está em V?

Exemplo 5

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

O elemento inverso está em V?

Exemplo 5

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

E as outras propriedades?

São válidas?

Unicidade do elemento neutro

Prove que o elemento neutro de um espaço vetorial é único.

Demonstração:

Suponhamos que existem dois elementos neutros n_1 e n_2. Para qualquer vetor v temos que

$$n_1 + v = v$$
$$n_2 + v = v$$

Unicidade do elemento neutro

Então

$$n_1 + v = n_2 + v$$

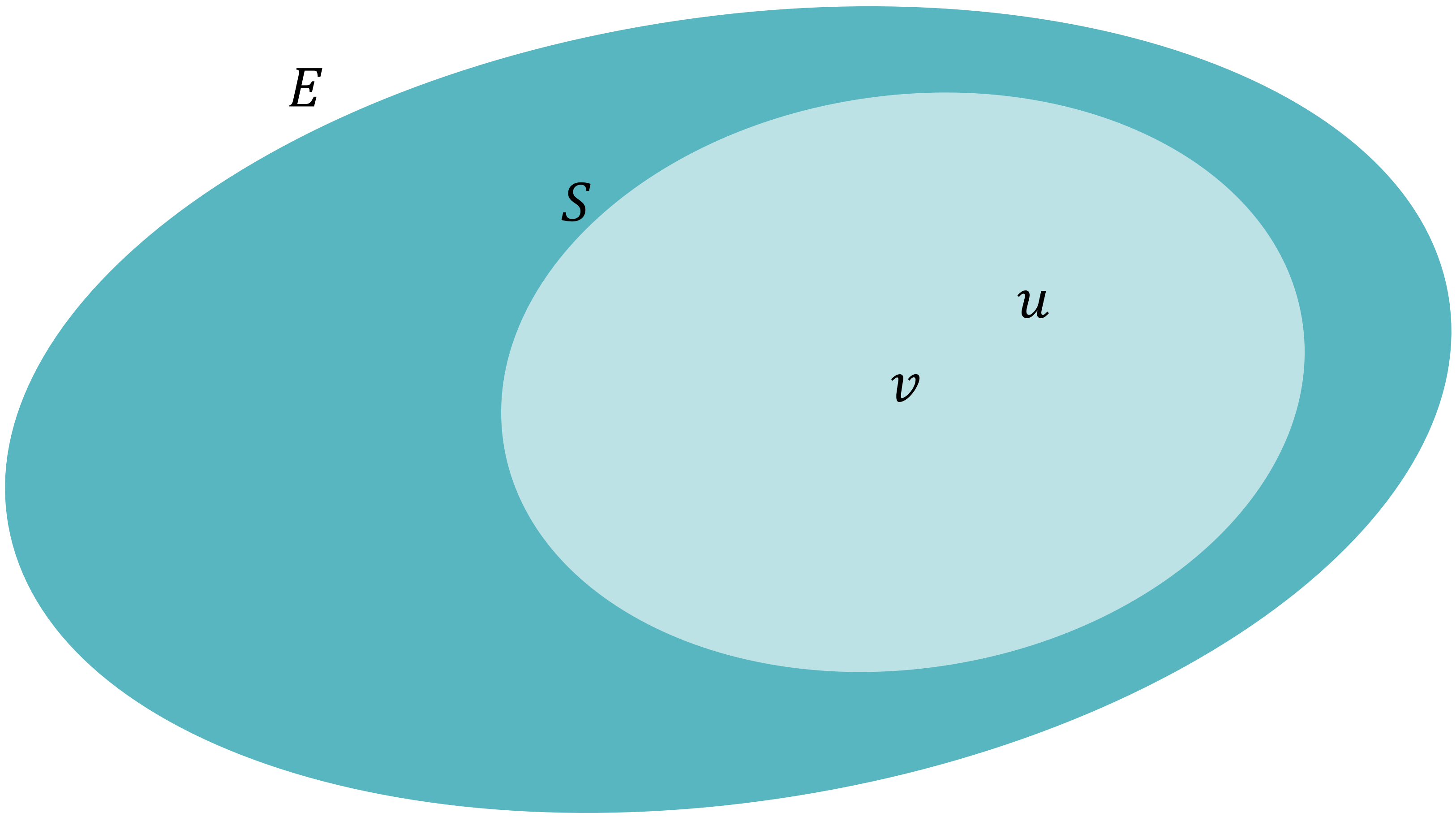
Logo $n_1 = n_2$

Subespaço

Dizemos que um subconjunto S de um espaço vetorial E é um subespaço se as operações são fechadas.

As operações serem fechadas é suficiente para que S seja um espaço vetorial.

Subespaço



Exemplo 6

Prove que o conjunto $P = \{(x, y, z) \;\; x - y + 2z = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: Considere $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Vamos verificar se $u + v \in P$. Vamos substituir as coordenadas de $u + v$ em

$$x - y + 2z = 0 \qquad\qquad (*)$$

Temos que $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Então

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2)$$

Exemplo 6

Temos que $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Então

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = x_1 - y_1 + 2z_1 + x_2 - y_2 + 2z_2$$

Como $u \in P$, então

$$x_1 - y_1 + 2z_1 = 0$$

e como $v \in P$ temos que

$$x_2 - y_2 + 2z_2 = 0$$

então

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = 0$$

Exemplo 6

Temos agora que verificar se $tv \in P$ para qualquer valor de t. Para isso, vamos substituir as coordenadas de tv em $(*)$ e então teremos

$$tx - ty + 2tz = t(x - y + 2z)$$

Como $v \in P$ temos que

$$x - y + 2z = 0$$

então

$$tx - ty + 2tz = 0$$

Logo, $u + v \in P$ e $tv \in P$.

Exemplo 7

Mostre que o conjunto $S = \left\{ f \in C([0,1]) \ / \ \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$ é um subespaço de $C([0,1])$

Demonstração: Vamos considerar duas funções quaisquer f, g. Para provar que $f + g$ está em S basta verificar se a integral de $f + g$ é igual a zero. Temos que

$$\int_0^1 f(x) + g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 0 + 0$$

Exemplo 7

Agora para saber se tf está no conjunto S precisamos verificar se a integral de tf é igual a zero. Temos que

$$\int_0^1 tf(x)dx = t\int_0^1 g(x)dx = t \cdot 0 = 0$$

Logo S é um subespaço.

Exercício

Verifique se o conjunto a seguir é um subespaço vetorial das matrizes 2×2.

Tome duas matrizes A e B e mostre que A + B tem essa propriedade

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad b = c \right\}$$

Depois faça o mesmo para tA