ÁLGEBRA LINEAR

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

$T: U \to W$

$Tv = \lambda v$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \|v\|$

$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$W \oplus U$

$\det(T - \lambda I) = 0$

$T_1(x, y) = 2(x+3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$A(x, y, z) = (x - y,\ z + y)$

$E(h, k) = (a+h)^2 + (b+k)^2 - f(a,b) - 2ah - 2bk$

Otimização

Um agricultor deseja plantar tomate, cebola e cenoura.O gasto com plantio é R$ 3,00/m² para o tomate, R$ 4,00/m² para cebola e R$ 2,00/m² para cenoura.

Seu lucro líquido é em média de R$ 1,00/m² com o tomate, R$ 0,80 com cebola e R$ 0,90 com a cenoura.

Este agricultor dispõe de R$ 35.000,00 para investir no plantio e sua área disponível para plantio é de 11.000 m². Como ele pode distribuir sua plantação para que obtenha um lucro máximo?

Otimização

Modelagem

A área de plantio para tomate, cebola e cenoura será representada por x_1, x_2 e x_3, respectivamente.

Maximizar lucro $\quad x_1 + 0{,}8 + 0{,}9x_3$ sujeito às restrições:

gasto $\quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 35000$

área disponível $\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 11000$

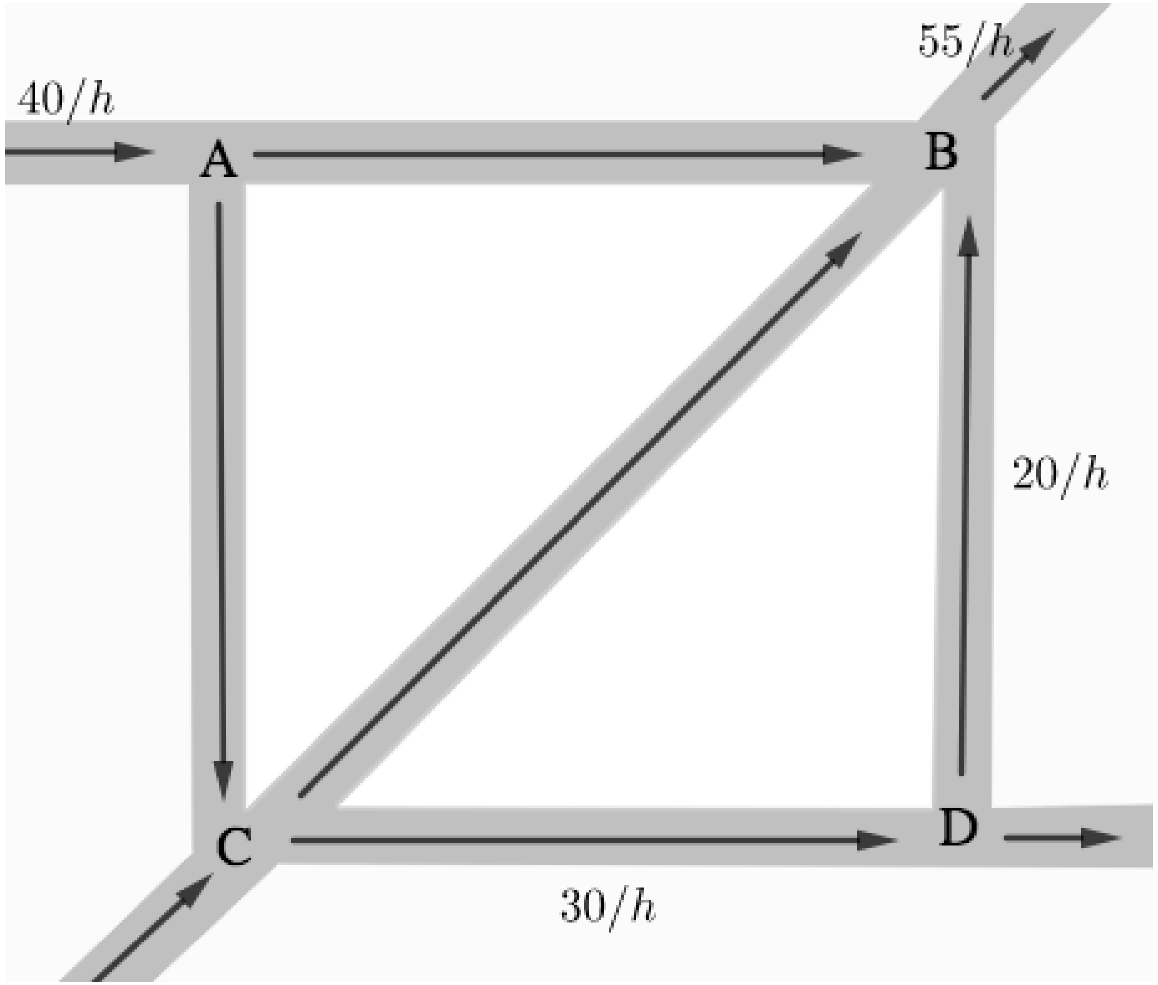
Solução do problema de otimização é um vetor $x = (x_1, x_2, x_3)$

Tráfego de veículos

Considere quatro cruzamentos A, B, C e D, como mostra a imagem. As setas indicam o sentido do tráfego.

Do cruzamento A entram 40 carros por hora, do cruzamento B saem 55 carros por hora, do cruzamento C para D passam 30 carros por hora, e de D para B passam 20 carros por hora.

Descubra a quantidade de carros que circulam no restante das ruas, considerando que nenhum carro fica parado.

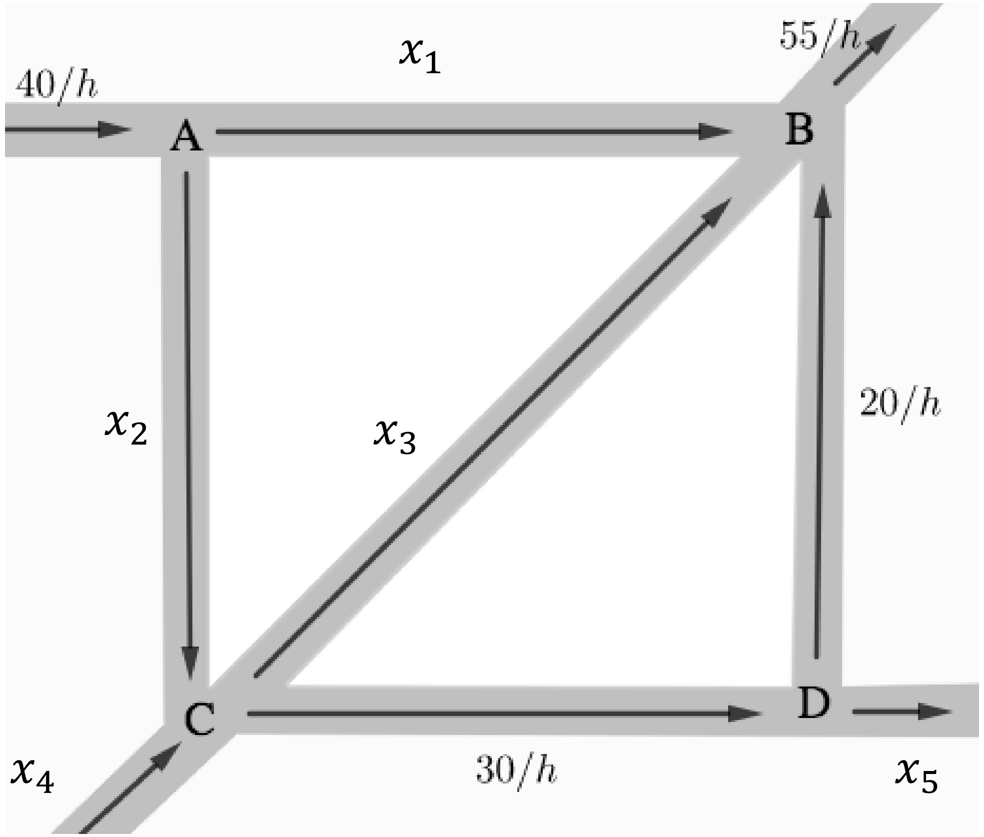


Tráfego de veículos

Modelagem

Em cada cruzamento a quantidade carro que entra é a mesma que sai.

cruzamento A	$40 = x_1 + x_2$
cruzamento B	$x_1 + x_3 + 20 = 55$
cruzamento C	$x_2 + x_4 = x_3 + 30$
cruzamento D	$30 = x_5 + 20$



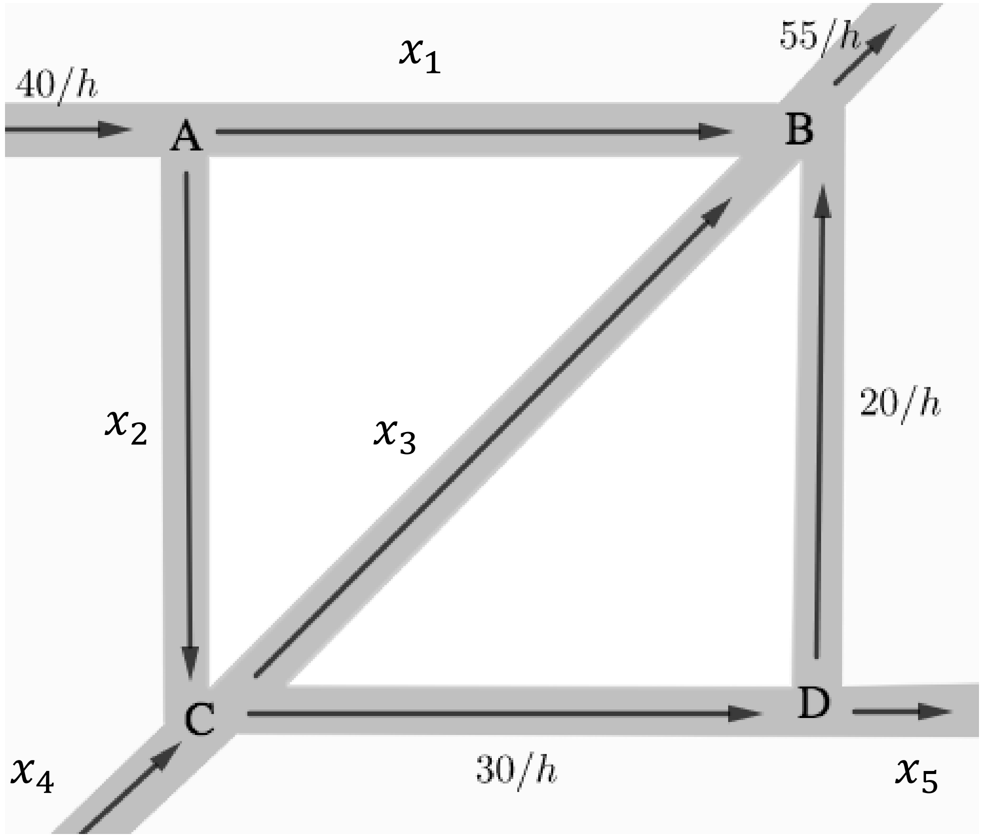
Tráfego de veículos

Modelagem

Obtemos um sistema de equações lineares

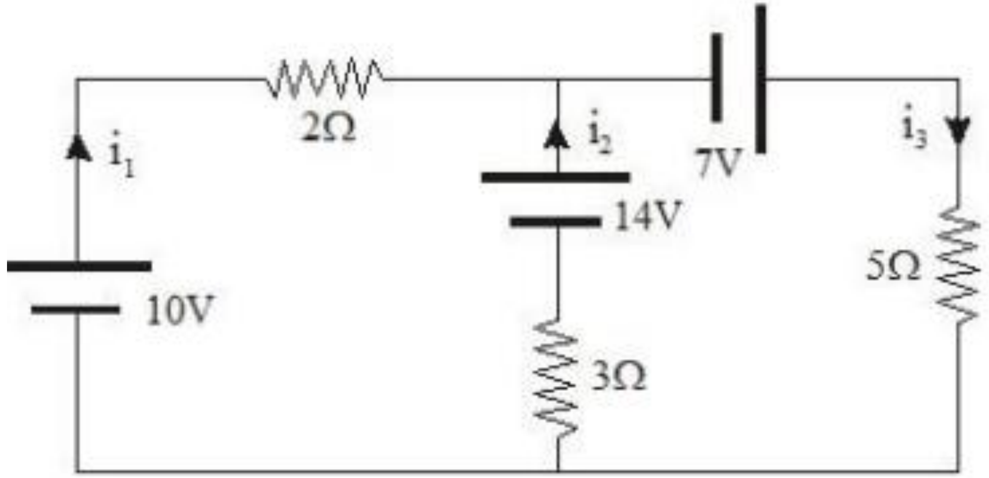
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 40 = 0 \\ x_1 + x_3 + 20 - 55 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_3 - 30 = 0 \\ x_5 - 10 = 0 \end{cases}$$

Uma solução do problema é um vetor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$



Circuitos elétricos

As leis de Kirchhoff são utilizadas para encontrar correntes em circuitos elétricos.



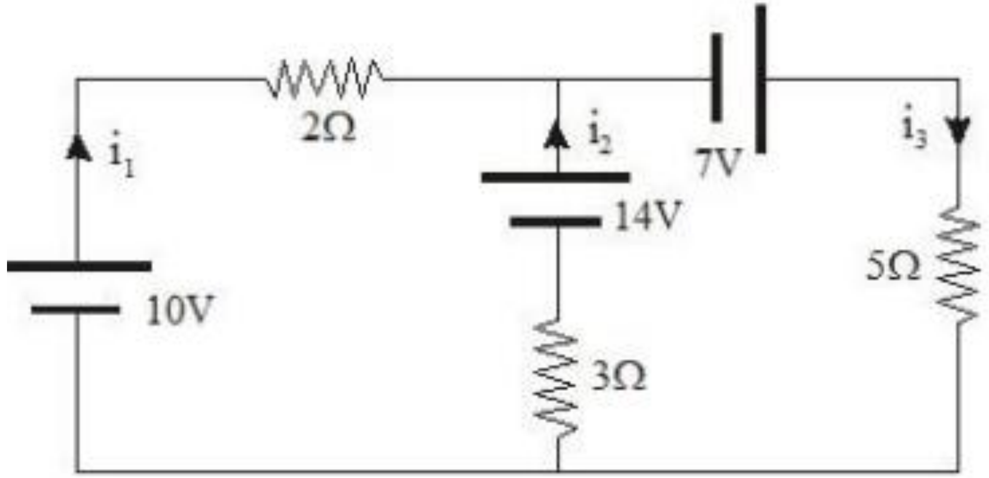
Lei dos nós: em qualquer nó, a soma das correntes que chegam em um nó é igual a soma das correntes que saem.

Lei das malhas: quando percorremos uma malha em um dado sentido, a soma algébrica das diferenças de potencial (ddp ou tensão) é igual a zero.

Analise o circuito para obter as intensidades das correntes.

Circuitos elétricos

Modelagem



Lei dos nós: $i_1 + i_2 = i_3$

Malha 1: $-10 + 2i_1 + 14 - 3i_2 = 0$

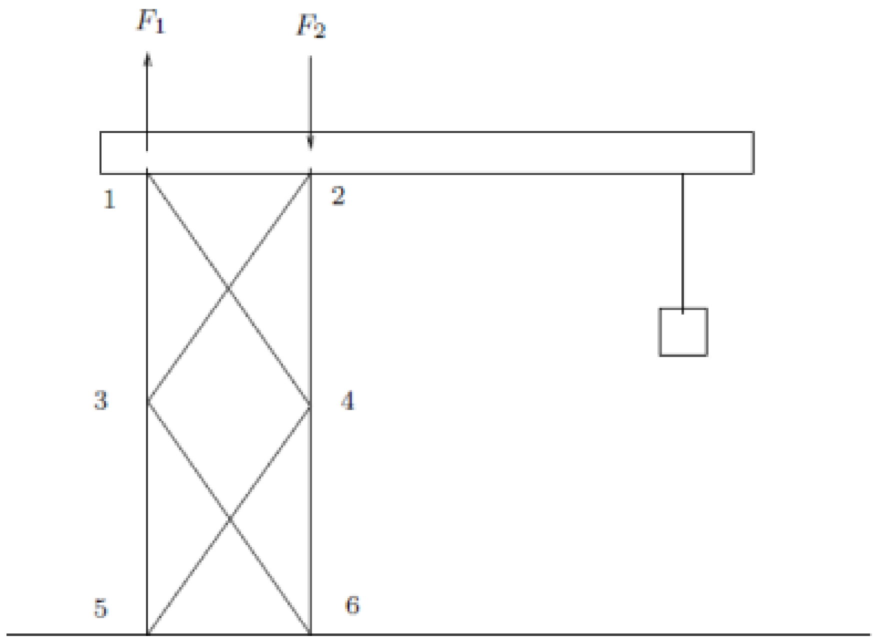
Malha 2: $-14 - 7 + 5i_3 + 3i_2 = 0$

Obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 2i_1 - 3i_2 = -4 \\ 3i_2 + 5i_3 = 21 \end{cases}$$

Estruturas metálicas

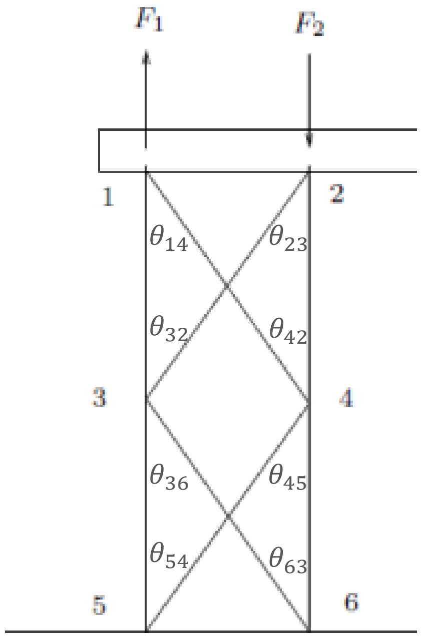
O cálculo das forças que incidem na estrutura, F_1 e F_2, é imediato, conhecendo se a massa que irá ser suspensa e o comprimento do braço do guindaste. Com essas forças, é preciso agora calcular a força exercida por cada viga nos nós (pontos de interseção de duas ou mais vigas) para que a estrutura permaneça em equilíbrio. Essas forças serão denotadas pelas variáveis f_{ij} , em que os índices indicam os nós ligados por esta viga. Por exemplo, a força f_{41} significa a força exercida sobre o nó 4 pela viga que liga o nó 4 ao nó 1.



Estruturas metálicas

Modelagem do problema

Seja θ_{ij} o ângulo que a barra ij faz com a vertical



$$
\begin{cases}
f_{12}\,cos\theta_{12} + f_{13}cos\theta_{13} + f_{14}cos\theta_{14} = F_1 \\
f_{12}sen\theta_{12} + f_{13}sen\theta_{13} + f_{14}sen\theta_{14} = 0 \\
f_{21}cos\theta_{21} + f_{23}cos\theta_{23} + f_{24}cos\theta_{24} = F_2 \\
f_{21}sen\theta_{21} + f_{23}sen\theta_{23} + f_{24}sen\theta_{24} = 0 \\
f_{31}cos\theta_{31} + f_{32}cos\theta_{32} + f_{35}cos\theta_{35} + f_{36}cos\theta_{36} = 0 \\
f_{31}sen\theta_{31} + f_{32}sen\theta_{32} + f_{35}sen\theta_{35} + f_{36}sen\theta_{36} = 0 \\
f_{41}cos\theta_{41} + f_{42}cos\theta_{42} + f_{45}cos\theta_{45} + f_{46}cos\theta_{46} = 0 \\
f_{41}sen\theta_{41} + f_{42}sen\theta_{42} + f_{45}sen\theta_{45} + f_{46}sen\theta_{46} = 0 \\
f_{53}\cos\theta_{53} + f_{54}cos\theta_{54} = 0 \\
f_{63}\cos\theta_{63} + f_{64}cos\theta_{64} = 0
\end{cases}
$$

Uma solução do problema é um vetor $f = (f_1, f_2, f_3. f_4, f_5, f_6, f_7, f_8)$

Tripulação de voo

Um problema de agendamento da tripulação de voo para a American Airlines exigia a manipulação de uma matriz com 837 linhas e mais de 12.750.000 colunas.

Os pesquisadores particionaram o problema em pequenas peças e resolveram em um computador.(Source: Very Large-Scale Linear Programming. A Case Study in Combining Interior Point and Simplex Methods, Bixby, Robert E., et al., Operations Research, 40, no. 5)

Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/sistemas-lineares-algumas-aplicacoes/

Sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemas de equações lineares

Uma solução do sistema, se existir, é um vetor $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

Objetivo

Encontrar uma maneira de obter uma solução de um sistema linear.

Operações elementares

Existem algumas operações elementares que podemos realizar sobre as equações de um sistema

1. Multiplicar por um número diferente de zero
2. Trocar uma equação por ela mesma somada a um múltiplo de outra
3. Permutar duas equações

Exemplo 1

Faça as operação indicada no sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 = 5 \\ \ \ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Trocar a segunda equação por ela mesma menos a primeira multiplicada por três

$$\begin{cases} \ \ 2x_1 \ - x_2 = 5 \\ -5x_1 \qquad\ \ = -15 \end{cases}$$

Matriz de um sistema linear

Um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser associado à uma matriz

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_1n & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Operações elementares sobre linhas

1. Multiplicação de um linha por um escalar não nulo
2. Substituição de uma linha por ela mesma mais um múltiplo de outra linha
3. Permutação entre linhas

Quando efetuamos operações sobre as linhas de uma matriz obtemos uma matriz chamada matriz linha equivalente.

Matrizes linhas equivalentes

Duas matrizes A e B são linhas equivalentes se forma possível obter uma delas e partir das operações elementares sobre as linhas da outra.

Matrizes linhas equivalentes estão associadas a sistemas equivalentes, isto é, sistemas que possuem a mesma solução.

Matriz triangular superior

Uma matriz é triangular superior se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Observe que a matriz triangular está associada a um sistema fácil de resolver

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\qquad\; a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\; a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

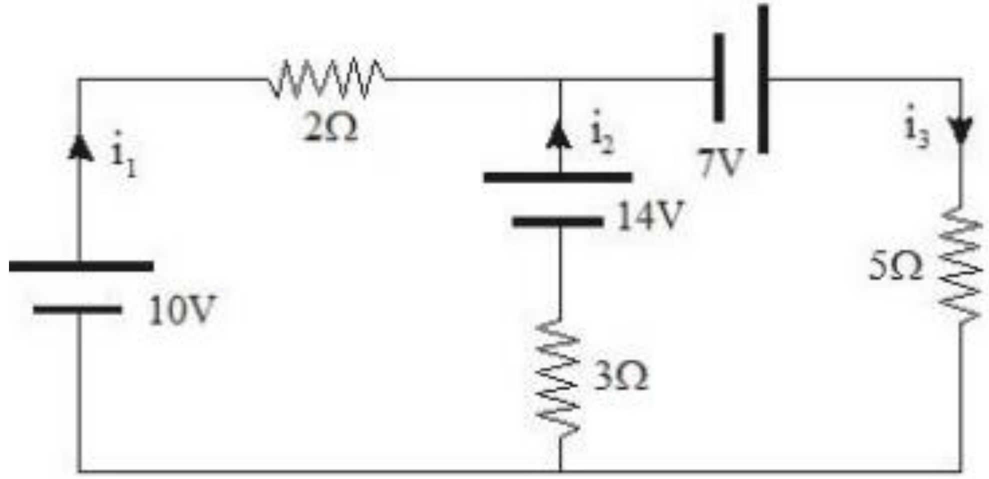
Estratégia

Efetuar operações sobre as linha de uma matriz do sistema até obter uma matriz linha equivalente da forma triangular superior.

Esse é o método de eliminação de Gauss!

Exemplo 2

Resolva o sistema linear obtido no problema dos circuitos elétricos apresentado.



$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 2i_1 - 3i_2 = -4 \\ 3i_2 + 5i_3 = 21 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistema é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 21 \end{array}\right)$$

Exemplo 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 21 \end{array}\right) \quad \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 21 \end{array}\right) \quad \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{3}{5}\ell_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 31/5 & 93/5 \end{array}\right)$$

Obtemos o sistema linear equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 - 2x_3 = -4 \\ 31/5x_3 = 91/5 \end{cases}$$

A solução é $x = (1,2,3)$

Matriz escada

i. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

ii. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv. Se as linhas $1, \dots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$;

Exemplo 3

i. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

ii. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv. Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

i. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

ii. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv. Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5

i. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

ii. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv. Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6

i. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

ii. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv. Se as linhas $1, \dots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Posto de uma matriz

Considere uma matriz $A_{n\times m}$ e $B_{n\times m}$ a sua matriz reduzida a forma escada. O posto da matriz A, denotado por p, é quantidade de linhas não nulas de B.

A nulidade da matriz A é $m - p$.

Exercício 1

Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 1 \end{cases}$$

Encontre o posto da matriz.

Solução

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \end{matrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \ell_3 + 2\ell_2 \end{matrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell_1 - \ell_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell_1 + \frac{3}{8}\ell_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.875 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_2 - \frac{1}{2}\ell_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.875 \\ 0 & 2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_2/2 \\ \ell_3/8 \end{matrix}$$

$$A^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.875 \\ 0 & 1 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 1.375 \end{pmatrix}$$

Posto de uma matriz

É possível relacionar o posto de uma matriz ampliada de um sistema de equações lineares à existência de soluções e a quantidade de soluções .

Exemplo 7

Mostre que o sistema tem infinitas soluções

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

Exemplo 8

Mostre que o sistema não tem solução

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$$

Solução de um sistema de equações lineares

- Única
- Infinitas
- Nenhuma

Teorema

i. Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii. Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$ a solução será única.

iii. Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Exercício 2

Encontre a solução do sistema linear obtido no problema de tráfego de veículos.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 40 = 0 \\ x_1 + x_3 + 20 - 55 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_3 - 30 = 0 \\ x_5 - 10 = 0 \end{cases}$$